

Fachhochschule

University of Applied Sciences

Oldenburg
Ostfriesland

Wilhelmshaven



Wissenschaftliche Einrichtung (WE)



Labor Grundlagen der Elektrotechnik

Pflichtvorlesung

Grundlagen der Elektrotechnik II

(EG II)

für Studierende
des
2. Semesters

Standort Wilhelmshaven
Fachbereich Ingenieurwissenschaften
Bereich Elektrotechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Ahlers

Literaturhinweise

Auf dem Gebiet "Grundlagen der Elektrotechnik" gibt es eine Menge brauchbarer Lehrbücher, hier sei nur eines erwähnt:

- /1/ Moeller; Fricke; Frohne; Vaske:
Grundlagen der Elektrotechnik
Teubner Verlag, Stuttgart 1986.

Gliederung Grundlagen der Elektrotechnik

1. Semester

1. Einführung
2. Der einfache Gleichstromkreis
3. Berechnung linearer Gleichstromnetze
4. Energie und Leistung bei Gleichstrom
5. Sonderabschnitte
6. Wechselstrom
 - 6.1 Einführung
 - 6.2 Beschreibung harmonischer Wechselgrößen
 - 6.3 Addition harmonischer Größen

2. Semester

- 6.4 Kennwerte von zeitabhängigen Größen
 - 6.5 Einfache Schaltungen
 - 6.6 Erweiterte Schaltungen
 - 6.7 Frequenzabhängigkeit
 - 6.8 Lineare Wechselstrom-Netze
 - 6.9 Mehrphasen Wechselstrom-Netze
 - 6.10 Erzeugung von Wechselstrom
 7. Elektrisches Strömungsfeld
 8. Elektrostatistisches Feld
- ### 3. Semester
9. Magnetisches Feld
 10. Schaltvorgänge

Gliederung Elektrotechnik II

6. Wechselstrom

- 6.1. Einführung
- 6.2. Beschreibung harmonischer Wechselgrößen
- 6.3. Addition harmonischer Größen
- 6.4. Kennwerte von zeitabhängigen Größen
- 6.5. Einfache Schaltungen
- 6.6. Erweiterte Schaltungen
- 6.7. Frequenzabhängigkeit
- 6.8. Lineare Wechselstrom-Netze
- 6.9. Drehstrom
- 6.10. Erzeugung von Wechselstrom

7. Elektrisches Strömungsfeld

- 7.1. Feldbegriffe
- 7.2. Feldarten in der Elektrotechnik
- 7.3. Stromdichte und Strom
- 7.4. Potential und Feldstärke
- 7.5. Ursache der elektrischen Strömung in Leitern
- 7.6. Ohmsches Gesetz in Elementarform
- 7.7. Leistungsdichte im Strömungsfeld
- 7.8. Feldlinien und Äquipotentiallinien
- 7.9. Berechnung des elektrischen Widerstandes
- 7.10. Verhalten an Grenzflächen

8. Das elektrostatische Feld

- 8.1. Ursache des elektrostatischen Feldes
- 8.2. Kraft auf eine Ladung
- 8.3. Zusammenwirken zweier Ladungen
- 8.4. Ladungsarten
- 8.5. Verschiebungsfluss und Verschiebungsflussdichte
- 8.6. Zusammenhang zwischen ϵ und ϵ_0
- 8.7. Der Begriff der Kapazität
- 8.8. Schaltung von Kondensatoren
- 8.9. Berechnung von Kondensatoren

Inhaltsverzeichnis Grundlagen der Elektrotechnik II

6. Wechselstrom	1
6.1. Einführung	1
6.1.1. Einteilung zeitabhängiger Größen	1
6.1.2. Allgemeine periodische Verläufe	3
6.2. Beschreibung harmonischer Wechselgrößen	4
6.2.1. Beschreibung in Zeitbereich	4
6.2.2. Rotierender Scheitelwertzeiger	8
6.2.3. Ruhender Scheitelwertzeiger	10
6.2.4. Effektivwertzeiger	11
6.2.5. Zusammenfassung: Beschreibung harmonischer Größen	13
6.3. Addition harmonischer Größen	14
6.3.1. Addition im Zeitbereich	14
6.3.2. Komplexe Addition harmonischer Schwingungen	16
6.3.3. Wiederholung komplexe Rechnung	17
6.3.4. Wiederholungsaufgaben, Beispiele, Aufgaben und Fragen zu Kap. 6.1 bis Kap. 6.3	24
6.4. Kennwerte von zeitabhängigen Größen	30
6.4.1. Arithmetischer Mittelwert	30
6.4.2. Quadratischer Mittelwert	32
6.4.3. Mittelwert eines Signals mit mehreren Abschnitten	35
6.4.4. Gleichrichtwert	36
6.4.5. Formfaktor	36
6.4.6. Kennwerte von nicht harmonischen Wechselgrößen	37
6.4.7. Mittelwerte von Standardsignalen	39
6.4.8. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 6.4	41
6.5. Einfache Schaltungen	46
6.5.1. Widerstand R	46
6.5.2. Induktivität L	49
6.5.3. Kapazität C	52
6.5.4. Phasenverschiebung	55
6.5.6. Komplexe Behandlung von Spannungsquellen	58
6.5.7. Reihenschaltung R-L	58
6.5.8. Reihenschaltung R-C	61
6.5.9. Parallelschaltung R-C	64
6.5.10. Komplexes ohmsches Gesetz, komplexer Widerstand und Leitwert	66
6.5.11. Leistung	67
6.5.12. Beispiele, Aufgaben und Fragen zu Kap. 6.5	70
6.6. Erweiterte Schaltungen	83
6.6.1. Spannungsteiler	83
6.6.2. Stromteiler	84
6.6.3. Wechselstrombrücken	86
6.6.3.1. Komplexe Abgleichbedingung	86
6.6.3.2. Messung einer realen Kapazität	86
6.6.3.3. Messung einer realen Induktivität	87
6.6.4. Blindstromkompensation	89
6.6.5. Leistungsanpassung	92
6.6.5.1. Wirkleistungsanpassung	93
6.6.5.2. Scheinleistungsanpassung	94
6.6.5.3. Leistungsanpassung an einem ohmschen Widerstand	94
6.6.6. Umwandlung Reihenschaltung \Leftrightarrow Parallelschaltung	97
6.6.7. Fragen und Aufgaben zu Kap. 6.6	98
6.7. Frequenzabhängigkeit	102
6.7.1. Frequenzgang und Übertragungsfunktion	102
6.7.1.1. Frequenzgang	102
6.7.1.2. Übertragungsfunktion	103
6.7.2. Logarithmisches Übertragungsmaß	104
6.7.3. Darstellung nach Betrag und Phase	105
6.7.3.1. Lineare Darstellung	105
6.7.3.2. Logarithmische Darstellung	107
6.7.3.2.1. Grundlagen der logarithmischen Darstellung	108
6.7.3.3. Anwendung der logarithmischen Darstellung	109

6.7.3.4 Fragen und Aufgaben zu frequenzabhängigen Widerständen	112
6.7.4. Ortskurven	116
6.7.4.1. Wiederholung: Mathematische Grundlagen der Ortskurve	116
6.7.4.2. Physikalische Ortskurven	122
6.7.4.3. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 6.7.4	129
6.7.5. Filter	131
6.7.5.1. Einteilung	131
6.7.5.2. Grenzfrequenz und Bandbreite	132
6.7.5.3. Bode-Diagramm	132
6.7.5.4. Tiefpass 1.Ordnung	133
6.7.5.5. Hochpass 1.Ordnung	137
6.7.5.6. Bandpass	140
6.7.5.7. Tiefpass 2.Ordnung	142
6.7.5.8. Beispiele, Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 6.7.5	145
6.7.6. Schwingkreise	155
6.7.6.1. Freie Schwingungen	155
6.7.6.2. Erzwungene Schwingungen	157
6.7.6.3. Reihenschwingkreis	157
6.7.6.4. Parallelschwingkreis	167
6.7.6.5. Vergleich: Reihen- und Parallelschwingkreis	171
6.7.6.6. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 6.7.6	172
6.8. Lineare Wechselstrom-Netze	175
6.8.1. Einleitung	175
6.8.1.1. Unterschied: Gleichstrom- Wechselstromrechnung	175
6.8.2. Komplexe Tips für den Taschenrechner	176
6.8.3. Komplexe Gleichungssysteme	176
6.8.4. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze	180
6.8.5. Komplexes Maschenstrom-Verfahren	182
6.8.6. Komplexes Maschenstrom Verfahren für Rechner	184
6.8.7. Dreieck-Stern und Stern-Dreieck-Umwandlung	187
6.8.8. Quellen-Umwandlung	188
6.8.9. Überlagerungsprinzip	190
6.8.10. Ersatzquellen	191
6.8.11. Komplexes Knotenpunkt-Potential-Verfahren	194
6.8.12. Komplexes Knotenpunkt-Potential-Verfahren für Rechner	197
6.9. Drehstrom	200
6.9.1. Mehrphasen-Wechselströme	200
6.9.2. Schaltungen der Quelle	201
6.9.2.1. Sternschaltung	201
6.9.2.2. Dreieckschaltung	204
6.9.3. Schaltungen der Verbraucher	205
6.9.3.1. Symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter	205
6.9.3.2. Symmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter	208
6.9.3.3. Symmetrische Dreieckschaltung	208
6.9.3.4. Unsymmetrische Dreieckschaltung	211
6.9.3.5. Unsymmetrische Sternschaltung mit Nulleiter	213
6.9.3.6. Unsymmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter	215
6.9.3.7. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 6.9.3	217
6.9.4. Rechts- und linksdrehendes Drehstromsystem	220
6.9.5. Leistungsmessung bei Drehstrom	222
6.9.5.1. Ein-Wattmeter-Methode	222
6.9.5.2. Drei-Wattmeter-Methode	222
6.9.5.3. Zwei-Wattmeter-Methode (Aron Schaltung)	223
6.9.6. Drehfaktor	224
6.9.7. Symmetrische Komponenten	225
6.10. Erzeugung von Wechselstrom	226
7. Elektrisches Strömungsfeld	227
7.1. Feldbegriffe	227
7.2. Feldarten in der Elektrotechnik	229
7.3. Stromdichte und Strom	230
7.4. Potential und Feldstärke	232
7.5. Ursache der elektrischen Strömung in Leitern	237

7.6. Ohmsches Gesetz in Elementarform	238
7.7. Leistungsdichte im Strömungsfeld	240
7.8. Feldlinien und Äquipotentiallinien	244
7.9. Berechnung des elektrischen Widerstandes	245
7.9.1. Analytische Methode	245
7.9.2. Grafische Methode	245
7.10. Verhalten an Grenzflächen	247
7.11. Abschließende Aufgaben zu Kap. 7	248
8. Das elektrostatische Feld	251
8.1. Ursache des elektrostatischen Feldes	251
8.2. Kraft auf eine Ladung	253
8.3. Zusammenwirken zweier Ladungen	254
8.4. Ladungsarten	255
8.5. Verschiebungsfluss und Verschiebungsflussdichte	256
8.6. Zusammenhang zwischen den Vektoren D und E	257
8.7. Der Begriff der Kapazität	263
8.8. Schaltung von Kondensatoren	266
8.9. Berechnung von Kondensatoren	268
8.9.1. Plattenkondensator	268
8.9.2. Analytische Kapazitätsberechnung	268
8.9.3. Konzentrischer Zylinder-Kondensator	268
8.9.4. Konzentrischer Kugelkondensator	269
8.9.5. Wickelkondensator	270
8.9.6. Feld und Kapazität einer Doppelleitung	270
8.9.6.1. Feld einer Einzelleitung	270
8.9.6.2. Feld einer Doppelleitung auf der Verbindungslinie	270
8.9.6.3. Kapazität einer Doppelleitung	271
8.9.6.4. Potential der Doppelleitung	272
8.9.7. Kapazität einer Leitung gegen Erde	273
8.9.8. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 8.9	273
8.10. Kraft zwischen zwei Punktladungen	276
8.11. Influenz, Faradayischer Käfig	277
8.12. Energie des elektrischen Feldes	278
8.13. Entladen eines Kondensators	280
8.14. Verluste im elektrostatischen Feld	281
8.14.1. Isolations-Verluste	281
8.14.2. Dielektrische Verluste	282
8.15. Spannungsverteilung an einer Reihenschaltung	284
8.16. Kraft auf Kondensatorplatten	286
8.17. Verallgemeinert Stromdichte	287
8.18. Ohmsches und Kirchhoffsche Gesetze in Elementarform	289
8.19. Verhalten an Grenzflächen	292
8.20. Abschlussaufgabe zu Kap. 8	294

6. Wechselstrom	1
6.1. Einführung	1
6.1.1. Einteilung zeitabhängiger Größen	1
6.1.2. Allgemeine periodische Verläufe	3
6.2. Beschreibung harmonischer Wechselgrößen	4
6.2.1. Beschreibung in Zeitbereich	4
6.2.2. Rotierender Scheitelwertzeiger	8
6.2.3. Ruhender Scheitelwertzeiger	10
6.2.4. Effektivwertzeiger	11
6.2.5. Zusammenfassung: Beschreibung harmonischer Größen	13
6.3. Addition harmonischer Größen	14
6.3.1. Addition im Zeitbereich	14
6.3.2. Komplexe Addition harmonischer Schwingungen	16
6.3.3. Wiederholung komplexe Rechnung	17
6.3.4. Wiederholungsaufgaben, Beispiele, Aufgaben und Fragen zu Kap. 6.1 bis Kap. 6.3	24

6. Wechselstrom

6.1. Einführung

Warum ist Wechselstrom wichtig?

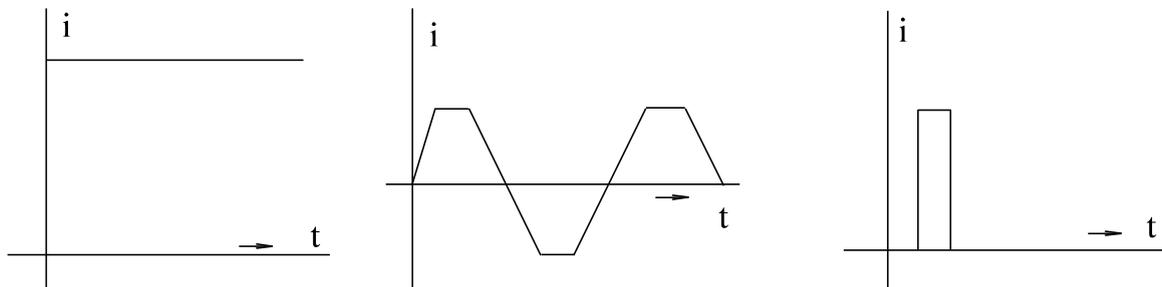
- In der Energietechnik werden über 99 % der elektrischen Energie als Wechselstrom erzeugt und verteilt.
- Auch in der Nachrichtentechnik spielt der Wechselstrom eine wichtige Rolle. Z.B. werden bei Radio und Fernsehen, Nachrichten analog mit Hilfe von Wechselstrom transportiert.

Warum ist im 1. Semester der Gleichstrom so intensiv behandelt worden?

1. Weil das Verständnis der Elektrotechnik am einfachsten mit Gleichstrom zu erklären ist.
2. Weil alle Methoden der Gleichstrom-Berechnung auch unter Anwendung der komplexen Rechnung auf die Wechselstromrechnung übertragen werden können.

6.1.1. Einteilung zeitabhängiger Größen

Um wechselstromförmige Größen zu klassifizieren, wird erst einmal ein Überblick über zeitabhängige Größen gegeben.



A] Gleichstrom

B] periodische Vorgänge

C] Einmalige Vorgänge

Bild EG611A: Beispiel für die Art von Zeitvorgängen

Nach Bild EG611A kann man je nach Zeitverlauf einteilen in:

A] Gleichstrom

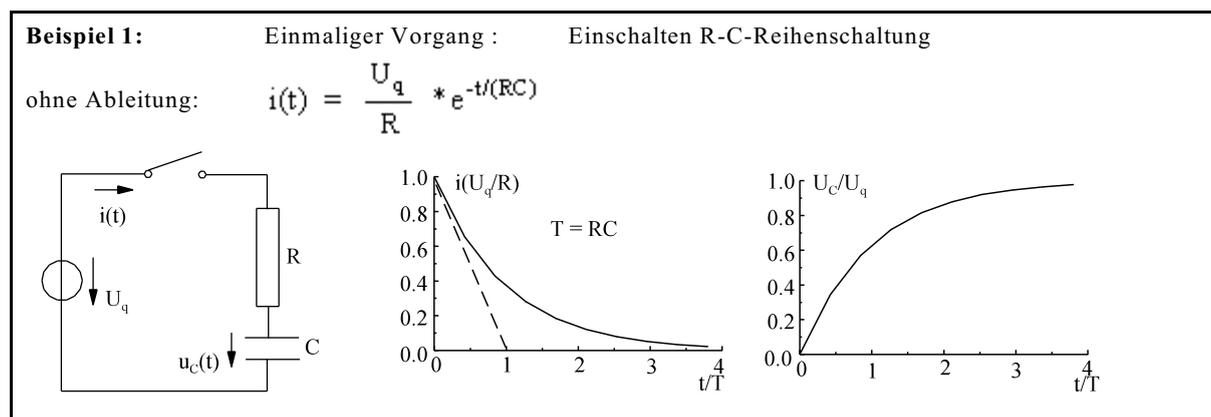
Aus dem 1. Semester bekannt, Strom fließt immer, keine Zeitabhängigkeit $f(t) = \text{const.}$

B] Periodische Vorgänge

Ein allgemeiner periodischer Vorgang ist in Bild EG61A B] dargestellt. Auch eine Sinus-Funktion ist ein periodischer Vorgang. Der Zusammenhang zwischen allgemein periodischen Vorgängen und sinusförmigen Größen soll in Abschnitt 6.1.2. behandelt werden.

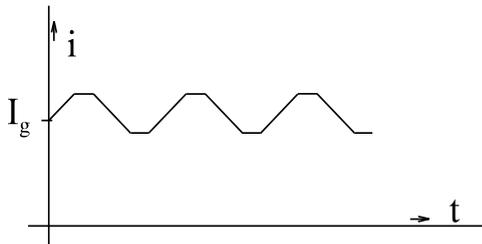
C] Einmalige Vorgänge

Einmalige Vorgänge entstehen durch impulsförmige Anregung oder auch bei Einschaltvorgängen. Berechnungsmethoden werden erst im 3. Semester angegeben.



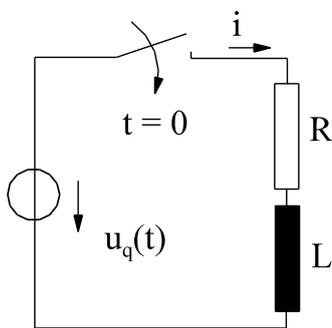
Die in Bild EG611A dargestellten Formen können sich auch überlagern, es ergeben sich sogenannte Mischformen, siehe Beispiele 2 und 3.

Beispiel 2: Gleichstrom I_g überlagert mit einem periodischen Vorgang



Beispiel 3: Einschalten einer AC-Quelle an R-L-Reihenschaltung.

Mischform: einmaliger Vorgang überlagert mit periodischem Vorgang



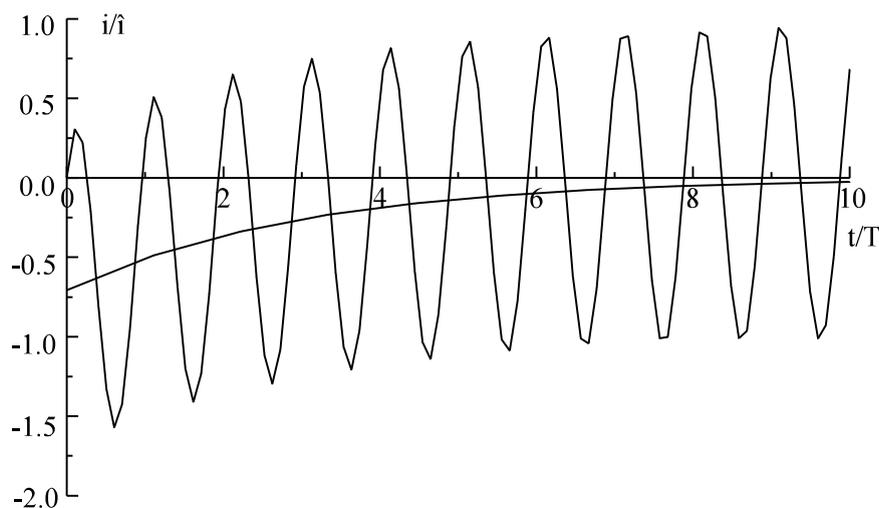
$$u_q(t) = \hat{u}_q \cdot \cos(\omega t)$$

Ableitung 3. Semester

mit
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

ergibt sich

$$i(t) = \frac{\hat{u}_q}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} * \left\{ \cos(\omega t - (\varphi)) - e^{-t/(L/R)} * 5 \cos(\varphi) \right\}$$



Ergebnis: Schwingung um einen abklingenden Mittelwert

In diesem Semester soll im Kap. 6 (Wechselstrom) nur der eingeschwungene Zustand behandelt werden ($t \rightarrow \infty$). Übergangsvorgänge sind abgeklungen und werden hier nicht betrachtet (erst wieder im 3.Semester).

6.1.2. Allgemeine periodische Verläufe

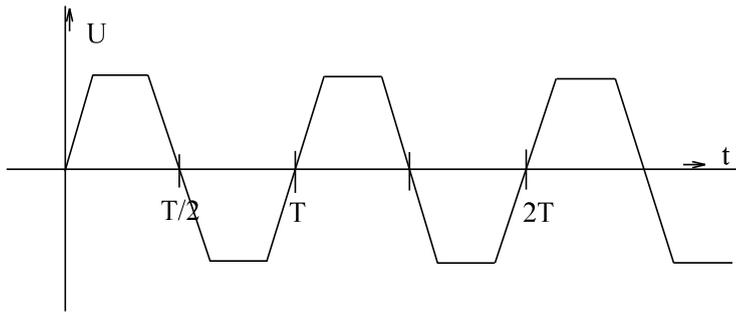


Bild EG612A

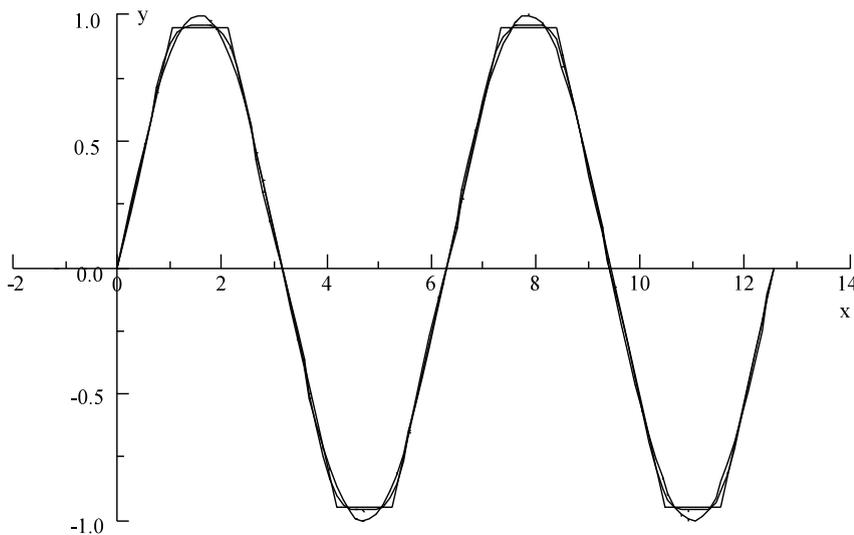
Bevor sinusförmige Verläufe betrachtet werden sollen, erfolgt erst einmal die Vorstellung allgemeiner periodischer Vorgänge. Die einzigste Bedingung hier ist, dass sich der Zeitverlauf nach der Periodendauer T wiederholt.

$$f(t) = f(t + nT)$$

Vorgriff auf das 3. Semester Mathematik: Jede periodische Funktion lässt sich als eine Summe von trigonometrischen Funktionen darstellen.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)]$$

Beispiel:

Bild EG612B: Trapezfunktion mit der Periode in x von 2π

In Bild EG612B ist die Trapez-Funktion $f(x)$, die sich aus Geraden zusammensetzt, durch eine Summe von Sinusfunktionen angenähert worden.

$$f_1(x) = \sin(x)$$

$$f_2(x) = \sin(x) - \frac{1}{25} \sin(5x)$$

Man sieht, dass bei Berücksichtigung der fünften Oberschwingung schon gute Ergebnisse erzielt werden.

Wann rechnet man mit Oberschwingungen? In diesem Semester soll nicht mit Oberschwingungen gerechnet werden, sondern nur mit sinusförmigen Größen, weil die Grundbegriffe der Wechselstromrechnung vorgestellt werden. Nur noch ein Hinweis zu allgemein periodischen Vorgängen. Aus dem ersten Semester ist das Überlagerungsprinzip bekannt. Bei einer nicht sinusförmigen periodischen Anregung (Spannungsquelle) und einem linearen Netzwerk lassen sich die Wirkungen der Grund- und Oberschwingungen einzeln berechnen und zum Schluss überlagern.

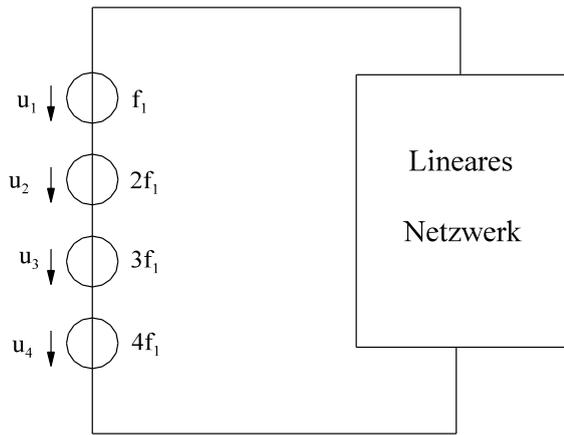


Bild EB612C

6.2. Beschreibung harmonischer Wechselgrößen

Was ist eine harmonische Wechselgröße?

Definition: Eine harmonische Wechselgröße ist eine periodische Funktion einer Frequenz.

Spezielle Funktionen: Kosinus Funktion
Sinus Funktion

Allgemeine Funktion: Kosinus (oder Sinus) Funktion in t verschoben und in y gestreckt.

6.2.1. Beschreibung in Zeitbereich

A) **Kosinus-Funktion:**

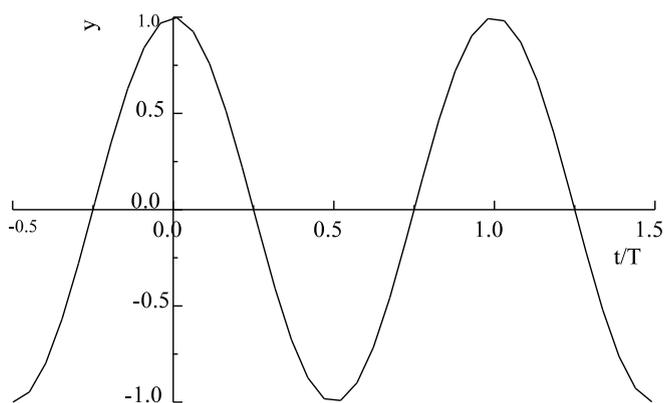


Bild EG621A:

Kosinus-Funktion

Die Kosinus-Funktion

$$y = \cos(x)$$

hat die Periodendauer in x von 2π

$$y = \cos(x) = \cos(x + 2\pi)$$

Die in Bild EG621A dargestellte Kosinus-Funktion $y = f(t)$ hat die Periodendauer T

Ansatz: $y = \cos(\omega t)$

wie groß ist ω ?

Bedingung: $y(t+T) = y(t)$
 $y(x+2\pi) = y(x)$
 $y = \cos[\omega t] = \cos[\omega(t+T)] = \cos[\omega t + \omega T]$

Aus den Vergleichen der oberen Gleichungen folgt:

$$x \triangleq \omega t$$

$$2\pi = \omega T$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

T - Periodendauer

$$f = \frac{1}{T} \text{ - Frequenz}$$

$$\omega = 2\pi \cdot f \text{ - Kreisfrequenz}$$

Anmerkung: $\omega t \triangleq$ Winkel in rad oder grad

Die obere angegebene Funktion ist noch nicht eine allgemeine harmonische Größe. Bis jetzt wurde nur die Streckung in x- oder t-Richtung vorgenommen mit Hilfe der Frequenz.

B) Sinus-Funktion:

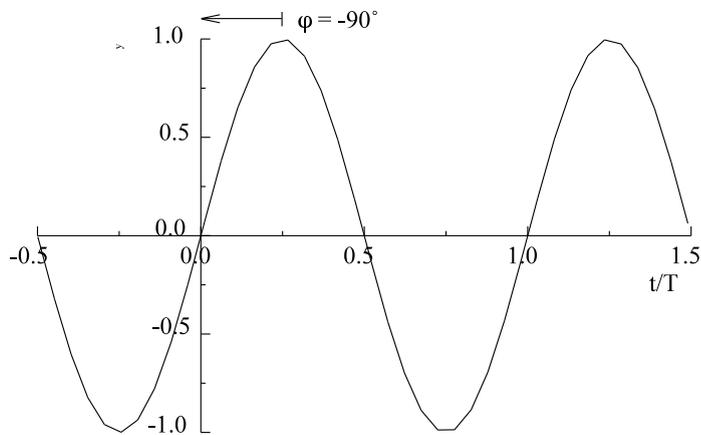


Bild EG621B: Sinus-Funktion

Die Sinus-Funktion nach Bild EG621B kann auch als verschobenen Kosinus-Funktion angesehen werden:

$$y = \sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90^\circ) = \cos(\omega t + \varphi)$$

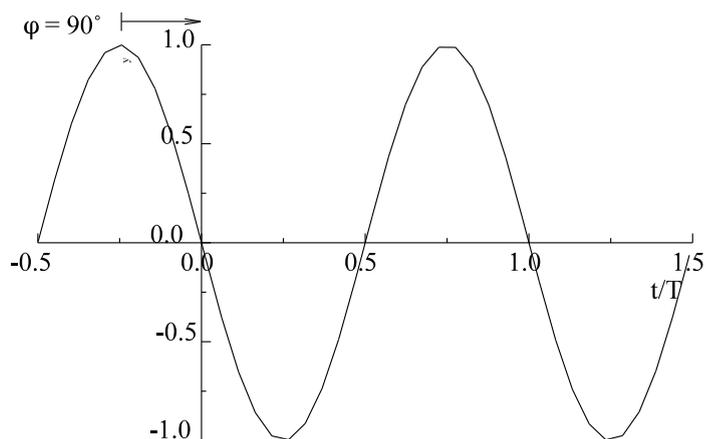
C] Minus-Sinus-Funktion:

Bild EG621C: Minus-Sinus-Funktion

Die Minus-Sinus-Funktion nach Bild EG621C kann wiederum als verschobenen Kosinus-Funktion dargestellt werden:

$$y = -\sin(\omega t) = \cos(\omega t + 90^\circ) = \cos(\omega t + \varphi)$$

Aus Sinus- und Minus-Sinus-Funktion ergeben sich schon Gemeinsamkeiten:

Die Funktionen $y = f(t)$ können als verschobene Kosinus-Funktionen

$$y = \cos(\omega t + \varphi)$$

angesehen werden, wobei der Winkel φ vom Maximum zur Schwingung nach $\omega t = 0$ zeigt, siehe Bild EG621B und EG621C.

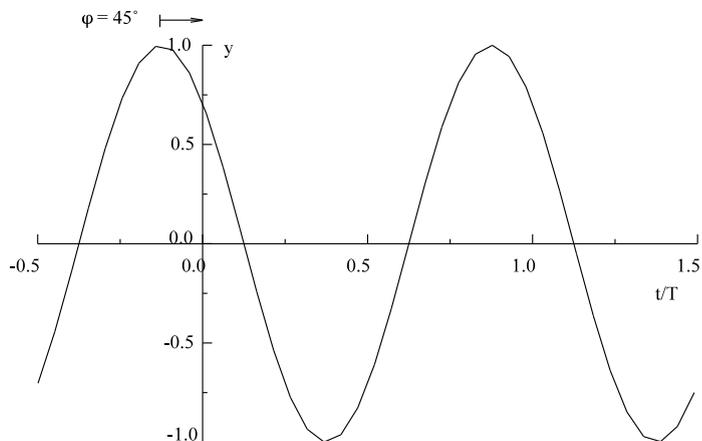
D] Allgemeine Verschiebung in ωt :

Bild EG621D:

$$y(t) = \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + 45^\circ)$$

Achtung: Der Winkel φ zählt immer vom Maximum nach $\omega t = 0$.

(Manche Lehrbücher rechnen auch mit verschobenen Sinus-Funktionen, ist aber nicht Norm)

DIN 40110 DIN 5483

E] Allgemeiner harmonischer Verlauf:

Zum allgemeinen harmonischen Verlauf fehlt noch die Streckung in y

$$y(t) = \hat{y} * \cos(\omega t + \varphi)$$

Jeder Wert von Bild EG621D wird mit \hat{y} multipliziert. \hat{y} ist die Amplitude der Schwingung, siehe auch Bild EG621E.

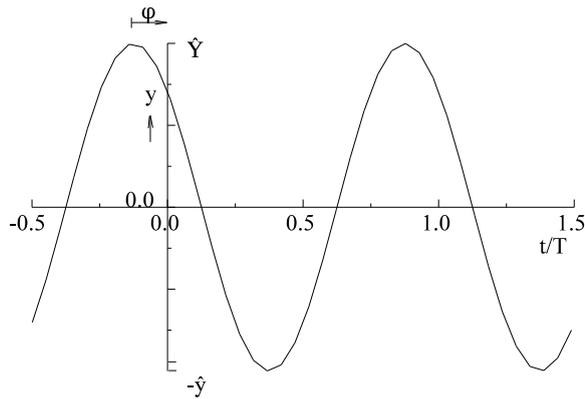
F] Zusammenfassung:

Bild EG621E:Allgemeine harmonische Schwingung

Die allgemeine harmonische Schwingung aus Bild EG621E

$$y(t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

lässt sich mit Hilfe der drei Werte

\hat{y} - Amplitude, Scheitelwert, Maximalwert

φ - Phasenverschiebung und

ω - Kreisfrequenz

beschreiben.

Die **Amplitude** \hat{y} , auch Scheitelwert oder auch Maximalwert genannt, repräsentiert in EGII später Strom- oder Spannungsmaximalwerte.

Der **Phasenverschiebungswinkel** φ wird immer vom Maximum der Schwingung zur y-Achse ($\omega t = 0$) gezählt.

Maximum vor $t = 0 \Rightarrow \varphi > 0$

Maximum nach $t = 0 \Rightarrow \varphi < 0$

Die **Kreisfrequenz** ω ist eine konstante Größe und lässt sich mit Hilfe der Frequenz, bzw. der Periodendauer angeben:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$[T] = \text{s}$$

$$[f] = \text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$$

$$[\omega] = \frac{1}{\text{s}}$$

6.2.2. Rotierender Scheitelwertzeiger

Eine harmonische Größe ist durch die drei Größen

- Amplitude (Betrag)
- Phase und
- Frequenz

ausreichend beschrieben. In vielen Netzwerken mit mehreren Elementen ist meist nur eine konstante Frequenz vorhanden, aber viele harmonische Wechselgrößen. **Von einer Wechselstromgröße ist somit der Betrag und die Phase von Interesse.**

Bei Betrag und Phase, an welche mathematische Zahlenart, die mit nur einer Zahl als Beschreibung auskommt, denkt man dann sofort? Antwort: an die komplexen Zahlen.

Wie kann die Funktion

$$y(t) = \hat{y} * \cos(\omega t + \varphi)$$

durch eine komplexe Zahl, bzw. Funktion dargestellt werden? Antwort: Nach Euler

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$$

ist die Kosinus-Funktion der Realteil der imaginären e-Funktion. Mit

$$\alpha = \omega t + \varphi$$

läßt sich $y(t)$ mit Hilfe der komplexen Rechnung angeben.

$$y(t) = \operatorname{Re} \{ \hat{y} * e^{j(\omega t + \varphi)} \}$$

$$y(t) = \operatorname{Re} \{ \hat{y} [\cos(\omega t + \varphi) * j\sin(\omega t + \varphi)] \}$$

$$y(t) = \operatorname{Re} \{ \underline{y}(t) \}$$

$$\underline{y}(t) = \hat{y} * e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Dieser komplexe Zeiger $\underline{y}(t)$ wird rotierender Scheitelwertzeiger genannt.

Für $\varphi = 45^\circ$ und $\hat{u} = 2$ ist die Funktion

$$\underline{u}(t) = 2 * e^{j(\omega t + 45^\circ)}$$

$$\underline{u}(t) = 2 \text{ V}$$

in der komplexen Ebene in Bild EG622A für verschiedene Winkel dargestellt. Wie erhält man grafisch aus den zeitabhängigen komplexen Zeigern den Wert von $y(t)$? Obere Formel gibt Auskunft: Den Realteil bilden. Realteil-bilden heißt aber Projektion auf die reelle Achse.

Konstruktion von $y(t)$:

- A] t-Achse in Richtung der negativen imaginären Achse auftragen.
- B] für verschiedene ωt -Werte: Projektion auf reelle Achse bilden und in Liniendiagramm eintragen.

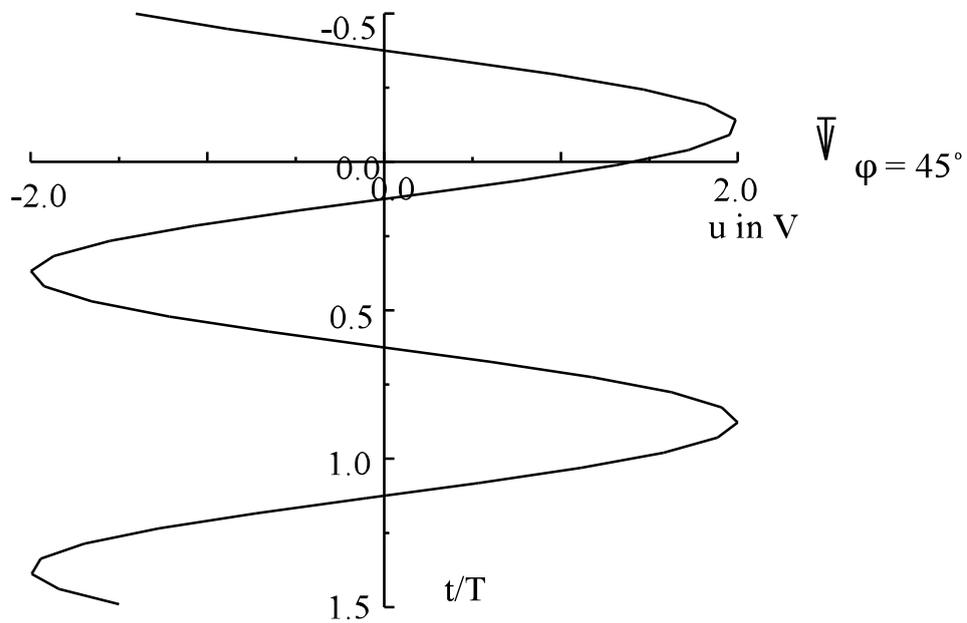
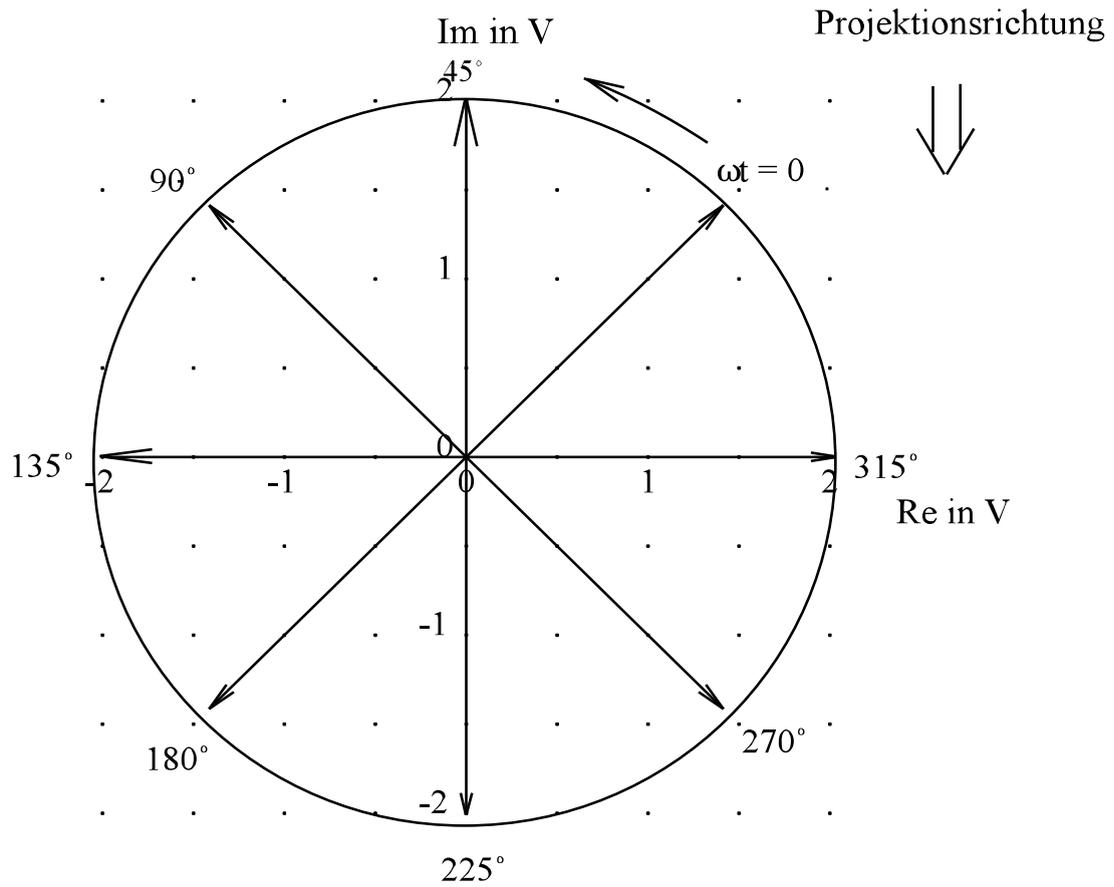


Bild EG622A

6.2.3. Ruhender Scheitelwertzeiger

Mit rotierenden Scheitelwertzeigern zu arbeiten ist in den meisten Fällen zu umständlich. Im letzten Kapitel wurde festgestellt, dass sich die Größe

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

durch den rotierenden Scheitelwertzeiger $\hat{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ darstellen lässt. Die obere Größe ist aber durch die zwei Größen \hat{u} und φ bei konstanter Kreisfrequenz ω gekennzeichnet. Es würde also ausreichen, einen Zeiger mit den Größen \hat{u} und φ nur zur Kennzeichnung einer Wechselgröße zu benutzen. **Betrag und Phase reichen aus, um eine Wechselgröße zu kennzeichnen.**

Der ruhende Scheitelwertzeiger

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}$$

charakterisiert die Wechselgröße im Zeitbereich

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Zwischen beiden oberen Ausdrücken kann man sich die Umwandlung zwischen Bild- und Zeitbereich vorstellen. Beide Richtungen der Umwandlung sind möglich.

Transformation

Bildbereich	<=>	Zeitbereich
Scheitelwertzeiger	<=>	Funktionskurve
$\hat{u} \cdot e^{j\varphi}$	<=>	$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

Beispiel 1: **gegeben:** Scheitelwertzeiger **gesucht:** Zeitverlauf

$\hat{u} = 500 \text{ V} \cdot e^{j60^\circ}$

$u(t) = 500 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 60^\circ)$

Beispiel 2: **gegeben:** Zeitverlauf **gesucht:** Scheitelwertzeiger

$i(t) = 20 \text{ A} \cdot \cos(\omega t - 30^\circ)$

$\hat{i} = 20 \text{ A} \cdot e^{-j30^\circ}$

6.2.4. Effektivwertzeiger

Die Netzspannung beträgt 230 V was heißt das?

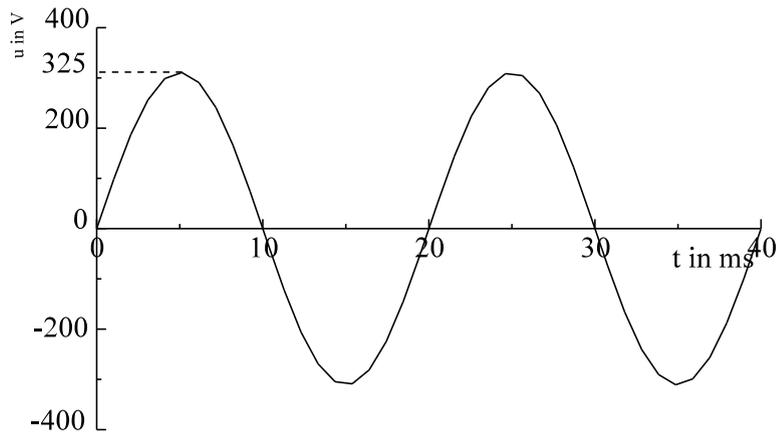


Bild EG624A

Wechselstromgrößen werden mit Effektivwerten bezeichnet, damit wie bei Gleichstrom die Leistung berechnet werden kann

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

Ableitung später in Kap. 6.4.2.

Der Zusammenhang zwischen Effektivwert und Maximalwert (Scheitelwert) ist durch den Faktor $\sqrt{2}$ gegeben:

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \qquad I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

Merke: Effektivwert ist geringer als Maximalwert, Faktor ist $\sqrt{2}$.

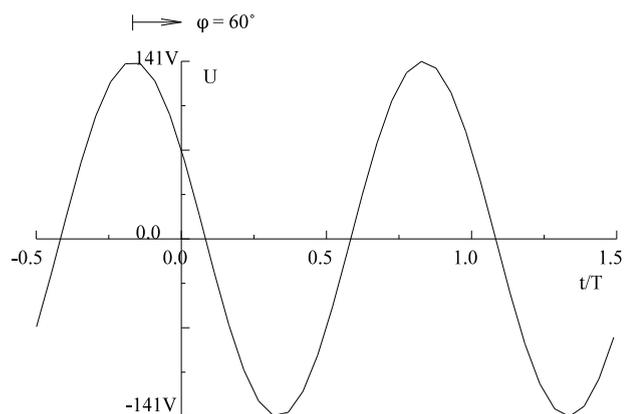
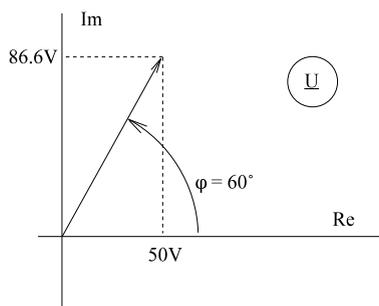
Effektivwerte werden mit großen Buchstaben gekennzeichnet.

Es wird jetzt auch ein Effektivwertzeiger definiert in der Form, dass der ruhende Scheitelwertzeiger durch $\sqrt{2}$ dividiert den Effektivwertzeiger ergibt.

ruhender Scheitelwertzeiger	-	Effektivwertzeiger	
$\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}$	-	$\underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi} = U \cdot e^{j\varphi}$	

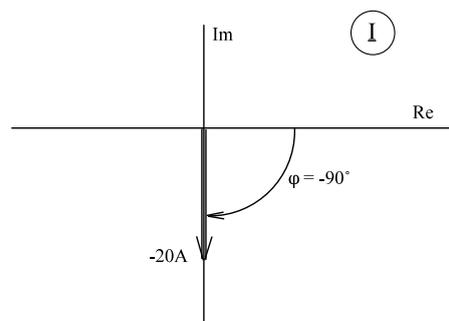
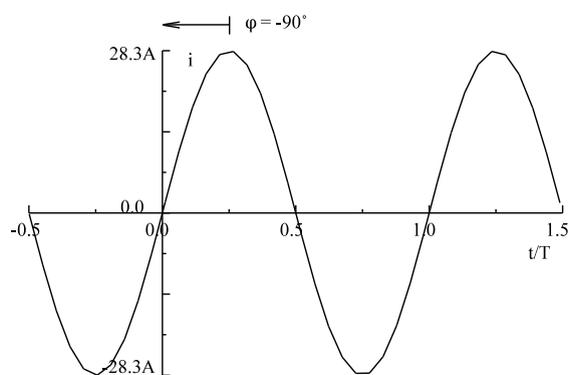
Um von dem Effektivwertzeiger zum Zeitbereich zu gelangen, muss man 2 Transformationen vornehmen. Effektivwertzeiger in Scheitelwertzeiger umformen und daraus in den Zeitbereich umformen.

Effektivwertzeiger	<=>	Scheitelwertzeiger	<=>	Funktionskurve
$\underline{u} = U \cdot e^{j\varphi}$	<=>	$\underline{\hat{u}} = \sqrt{2} \cdot U \cdot e^{j\varphi}$	<=>	$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

Beispiel 1:**gegeben:** Effektivwertzeiger**gesucht:** Zeitverlauf

$$\underline{U} = 100 \text{ V} * e^{j60^\circ}$$

$$u(t) = 141 \text{ V} * \cos(\omega t + 60^\circ)$$

Beispiel 2:**gegeben:** Zeitverlauf

$$i(t) = 28.3 \text{ A} \cos(\omega t - 90^\circ)$$

$$\underline{I} = 20 \text{ A} * e^{-j90^\circ}$$

6.2.5. Zusammenfassung: Beschreibung harmonischer Größen

Harmonische Größen sind zeitlich veränderliche Größen einer Frequenz. Die Kosinus-Funktion ist in t-Richtung verschoben und in y-Richtung mit der Amplitude \hat{y} gestreckt.

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Die Harmonische Schwingung (z.B. einer Spannung) läßt sich beschreiben als

- A] Diagramm in Zeitbereich
- B] Mathematische Zeitabhängigkeit
- C] Komplexer rotierender Scheitelwertzeiger
- D] Komplexer ruhender Scheitelwertzeiger
- E] Komplexer Effektivwertzeiger

Alle Formen sind in einander umrechenbar, man kann dieses auch als Transformation bezeichnen, eine Transformation von den Zeitbereich in den Bildbereich (komplexe Zahl).

Transformation

Zeitbereich \Leftrightarrow Bildbereich (komplexe Zahl)
 A, B \Leftrightarrow D, E

Der rotierende komplexe Scheitelwertzeiger ist eine Art Bindeglied zwischen Zeit- und Bildbereich.

A] Diagramm in Zeitbereich

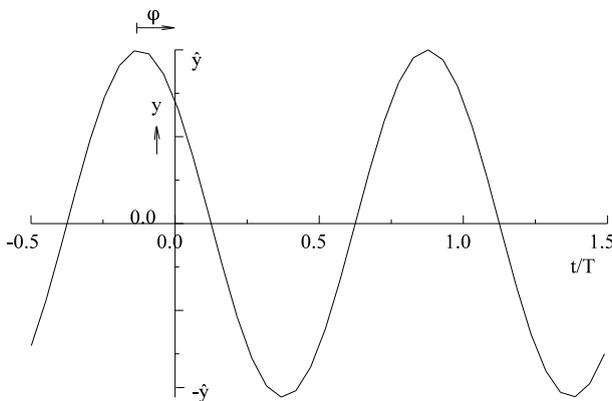


Bild EG621E:

Der Winkel φ wird vom Maximum der Spannung nach $t = 0$ gezählt.

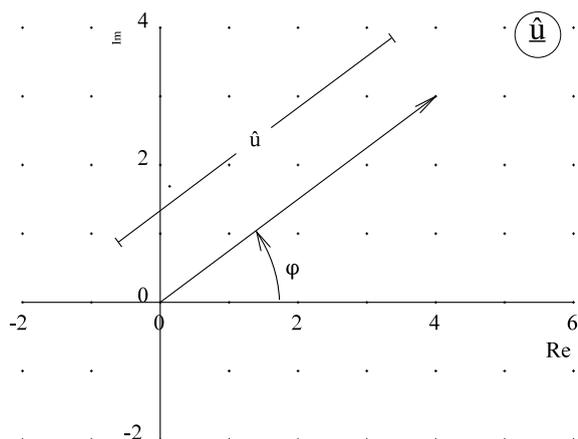
B] Mathematische Zeitabhängigkeit

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

C] Komplexer rotierender Scheitelwertzeiger

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

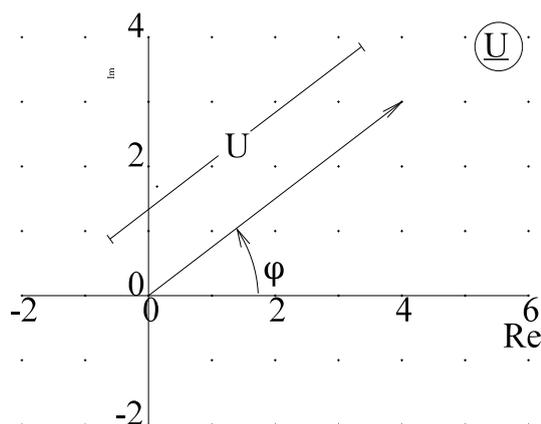
$$u(t) = \operatorname{Re}\{\underline{u}(t)\} = \operatorname{Re}\{\hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \hat{u} \cdot \operatorname{Re}\{\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\} = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

D] Komplexer ruhender Scheitelwertzeiger

$$\underline{u}(t=0) = \hat{u}$$

$$\hat{u} = \hat{u} * e^{j\varphi}$$

Bild EG625B

E] Komplexer Effektivwertzeiger

$$\underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi} = U * e^{j\varphi}$$

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

Bild EG625C

6.3. Addition harmonischer Größen

In Wechselstromschaltungen sind oft harmonische Schwingungen zu addieren (Kirchhoff I und II). Im Knoten werden Ströme addiert und in der Reihenschaltung Spannungen. Es soll im Zeitbereich der Aufwand gezeigt werden, anschließend wird dann eine einfachere Methode vorgestellt.

6.3.1. Addition im Zeitbereich

Führt man die Addition zweier harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz im Zeitbereich für verschiedene t -Werte aus, erhält man wieder eine Schwingung mit gleicher Frequenz, aber mit anderer Amplitude und mit anderem Phasenwinkel, siehe Bild EG631A.

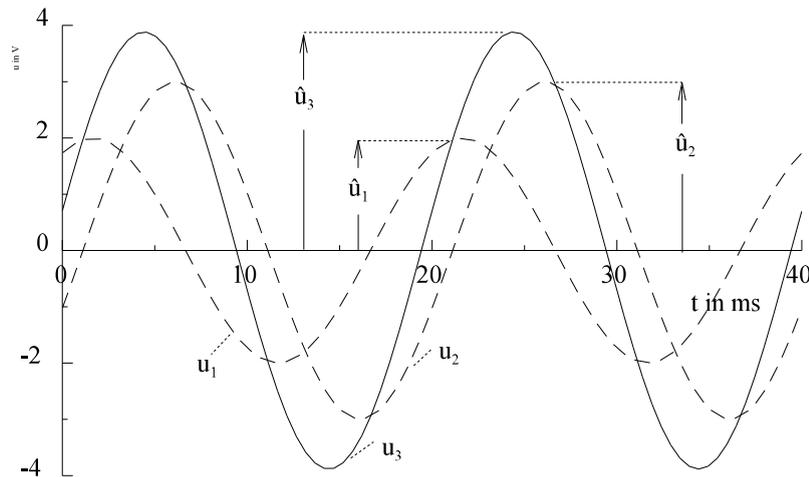


Bild EG631A

Was für Bild EG631A manuell für verschiedene t-Werte durchgeführt wurde, soll mathematisch nachvollzogen werden:

$$u_3 = u_2 + u_1$$

Mit Ansätzen

$$u_1 = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2 = \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$u_3 = \hat{u}_3 \cdot \cos(\omega t + \varphi_3)$$

ergibt sich

$$\hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) = \hat{u}_3 \cdot \cos(\omega t + \varphi_3)$$

Durch Anwendung der Additionstheoreme erhält man:

$$\begin{aligned} & \hat{u}_1 \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\omega t) - \hat{u}_1 \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\omega t) \\ & + \hat{u}_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \cos(\omega t) - \hat{u}_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \sin(\omega t) = \\ & \hat{u}_3 \cdot \cos(\varphi_3) \cdot \cos(\omega t) - \hat{u}_3 \cdot \sin(\varphi_3) \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Obere Gleichheit gilt für jedes t, dieses ist nur zu Erreichen, wenn die Terme mit $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ einzeln gleich sind:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 \cdot \sin(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\varphi_2) &= \hat{u}_3 \cdot \sin(\varphi_3) \\ \hat{u}_1 \cdot \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\varphi_2) &= \hat{u}_3 \cdot \cos(\varphi_3) \end{aligned}$$

gegeben: $\hat{u}_1, \varphi_1, \hat{u}_2, \varphi_2$

gesucht: \hat{u}_3, φ_3 => Gleichungssystem mit den 2 Unbekannten \hat{u}_3 und φ_3 .

Durch Division oberer Gleichungen lässt sich der Phasenwinkel φ_3 bestimmen:

$$\tan(\varphi_3) = \frac{\sin(\varphi_3)}{\cos(\varphi_3)} = \frac{\hat{u}_1 \cdot \sin(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{\hat{u}_1 \cdot \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\varphi_2)}$$

Durch Quadrierung ergibt sich die Amplitude \hat{u}_3 :

$$[\hat{u}_3 \cdot \sin(\varphi_3)]^2 + [\hat{u}_3 \cdot \cos(\varphi_3)]^2 = \hat{u}_3^2 [\sin^2(\varphi_3) + \cos^2(\varphi_3)] = \hat{u}_3^2$$

$$\hat{u}_3 = \sqrt{[\hat{u}_1 \cdot \sin(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\varphi_2)]^2 + [\hat{u}_1 \cdot \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\varphi_2)]^2}$$

Diese Methode ist sehr umständlich. Eine bessere Möglichkeit wird im nächsten Abschnitt aufgezeigt.

6.3.2. Komplexe Addition harmonischer Schwingungen

Die Schwingungen

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2(t) = \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

sollen addiert werden zu

$$u_3(t) = \hat{u}_3 \cdot \cos(\omega t + \varphi_3)$$

$$u_3(t) = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Von den drei Schwingungen wird der komplexe rotierende Scheitelwertzeiger gebildet:

$$\underline{u}_1(t) = \hat{u}_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)} \quad \underline{u}_2(t) = \hat{u}_2 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2)} \quad \underline{u}_3(t) = \hat{u}_3 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_3)}$$

und damit die Addition durchgeführt, danach eingesetzt und umgeformt:

$$\begin{aligned} \underline{u}_3(t) &= \underline{u}_1(t) && + \underline{u}_2(t) \\ \hat{u}_3 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_3)} &= \hat{u}_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)} && + \hat{u}_2 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2)} \\ \hat{u}_3 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_3} &= \hat{u}_1 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_1} && + \hat{u}_2 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_2} \\ \hat{u}_3 \cdot e^{j\varphi_3} &= \hat{u}_1 \cdot e^{j\varphi_1} && + \hat{u}_2 \cdot e^{j\varphi_2} \\ \hat{u}_3 &= \hat{u}_1 && + \hat{u}_2 \\ \frac{\hat{u}_3}{\sqrt{2}} &= \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}} && + \frac{\hat{u}_2}{\sqrt{2}} \\ \underline{U}_3 &= \underline{U}_1 && + \underline{U}_2 \end{aligned}$$

Die Addition von Schwingungen gleicher Frequenz ist somit auf die Addition zweier komplexer Zahlen zurückgeführt und damit wesentlich einfacher als im Zeitbereich.

Berechnung des Ergebnisses aus den letzten Abschnitt:

$$\underline{\hat{u}}_3 = \underline{\hat{u}}_1 + \underline{\hat{u}}_2 = \hat{u}_1 \cdot e^{j\varphi_1} + \hat{u}_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$\hat{u}_3 = [\hat{u}_1 \cdot \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\varphi_2)] + j[\hat{u}_1 \cdot \sin(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\varphi_2)]$$

Daraus lassen sich Betrag und Phase von u_3 berechnen:

$$\hat{u}_3 = \sqrt{[\hat{u}_1 \cdot \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\varphi_2)]^2 + [\hat{u}_1 \cdot \sin(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\varphi_2)]^2}$$

$$\varphi_3 = \arctan \left[\frac{\hat{u}_1 \cdot \sin(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{\hat{u}_1 \cdot \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\varphi_2)} \right]$$

Fazit: Schwingungen gleicher Frequenz lassen sich mit Hilfe der komplexen Rechnung addieren.

6.3.3. Wiederholung komplexe Rechnung

Da die komplexe Rechnung für die Wechselstromrechnung besonders wichtig ist, sollen an dieser Stelle die Rechenregeln für die komplexe Rechnung wiederholt werden.

6.3.3.1. Definitionen

$$\sqrt{-1} = j \quad j^2 = -1j = \text{imaginäre Einheit}$$

Die allgemeine komplexe Zahl setzt sich aus einem Realteil (Reelle Zahl) und einer imaginären Zahl (reelle Zahl mal imaginäre Einheit) zusammen.

$$\underline{z} = a + jb = r \cdot e^{j\varphi}$$

6.3.3.2. Gauß'sche Zahlenebene

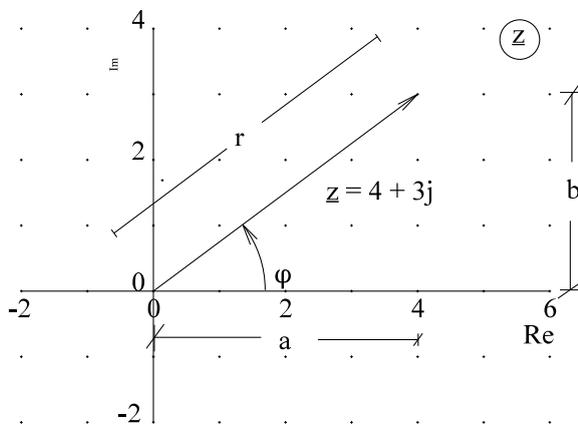


Bild EG6332A: Gauß'sche Zahlenebene

6.3.3.3. Euler Formel

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

$$\underline{z} = a + jb \quad \text{Komponentenschreibweise}$$

$$\underline{z} = r \cdot e^{j\varphi} = r \angle \varphi \quad \text{Versor-Schreibweise}$$

6.3.3.4. Umwandlung von kartesischen Koordinaten in Polar-Koordinaten

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} \quad a > 0$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + \pi \quad a < 0$$

6.3.3.5. Umwandlung von Polar-Koordinaten in kartesischen Koordinaten

$$a = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$b = r \cdot \sin(\varphi)$$

6.3.3.6. Konjugiert komplexe Zahl

$$\underline{z}^* = (a + jb)^* = [r^* e^{j\varphi}]^*$$

$$\underline{z}^* = a - jb = r^* e^{-j\varphi}$$

$$\underline{z}^* \underline{z} = a^2 + b^2 = r^2$$

$$z + z^* = 2a \quad z - z^* = 2b$$

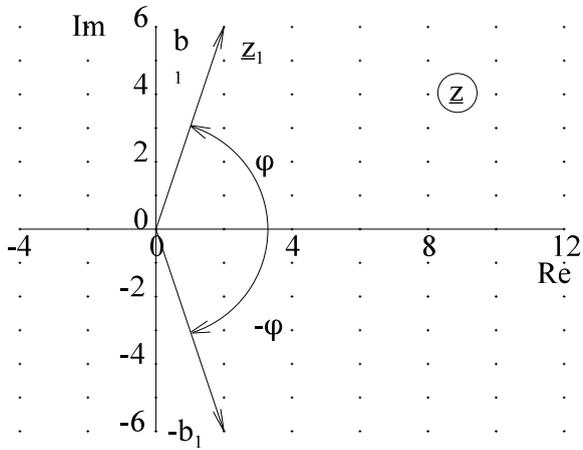


Bild EG6336A: Konjugiert komplexe Zahl

6.3.3.7. Potenzen von j

$$j^0 = 1$$

$$j^1 = j \quad \frac{1}{j} = -j$$

$$j^2 = -1 \quad \frac{1}{j^2} = -1$$

$$j^3 = -j \quad \frac{1}{j^3} = j$$

$$j^4 = 1 \quad \frac{1}{j^4} = 1$$

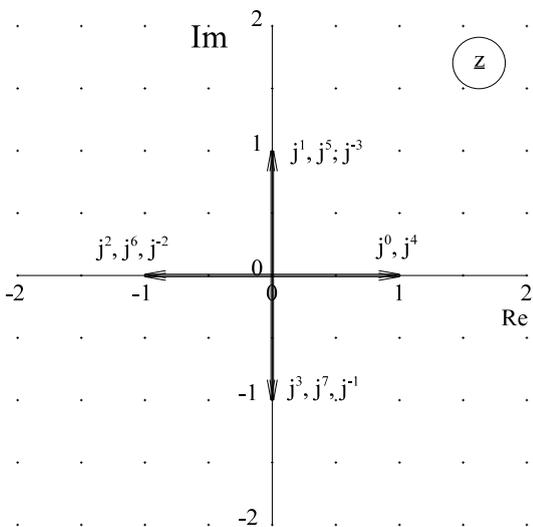


Bild EG6337A: Potenzen von j

6.3.3.8. Addition komplexer Zahlen

$$z_3 = z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j$$

$$a_3 = a_1 + a_2 \quad b_3 = b_1 + b_2$$

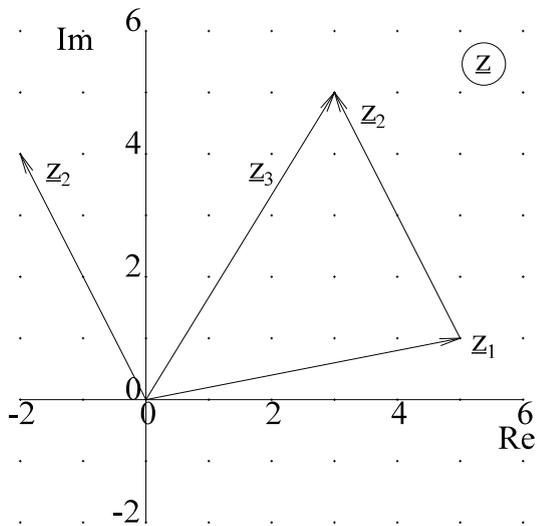


Bild EG6338A: Grafische Addition komplexer Zahlen

6.3.3.9. Subtraktion komplexer Zahlen

$$z_3 = z_1 - z_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

$$a_3 = a_1 - a_2 \quad b_3 = b_1 - b_2$$

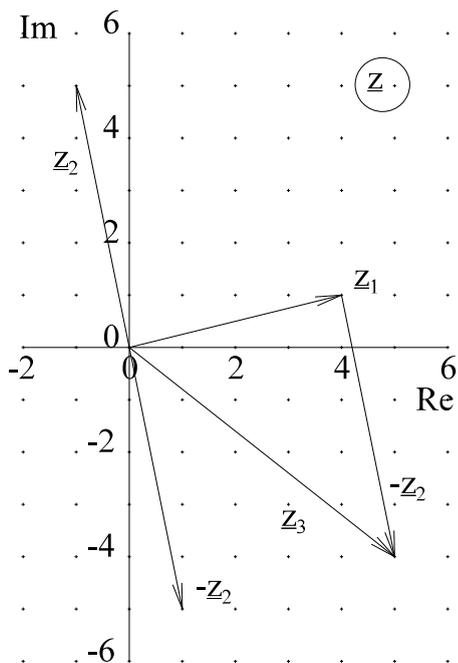
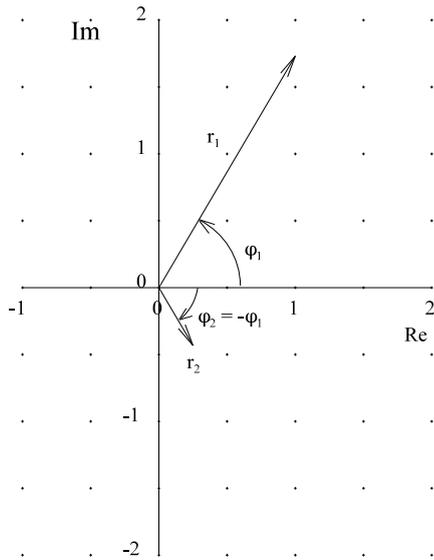


Bild EG6339A: Grafische Subtraktion komplexer Zahlen

6.3.3.10. Inversion einer komplexen Zahl



$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{a_1 + jb_1} * \frac{a_1 - jb_1}{a_1 - jb_1} = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} - j \frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2}$$

$$z_2 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1 * e^{j\phi_1}} = \frac{1}{r_1} * e^{-j\phi_1} = r_1^{-1} / -\phi_1 = r_2 / \phi_2$$

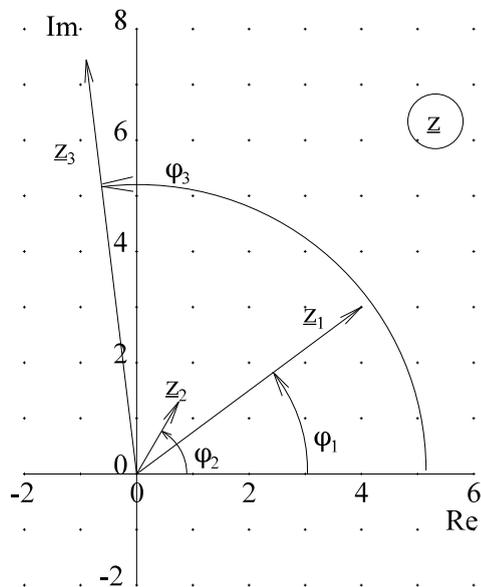
$$r_2 = \frac{1}{r_1}$$

$$\phi_2 = -\phi_1$$

Bild EG3310A: Grafisch Darstellung der Inversion

6.3.3.11. Multiplikation komplexer Zahlen

$$z_1 * z_2 = r_1 * e^{j\phi_1} * r_2 * e^{j\phi_2} = (r_1 * r_2) * e^{j(\phi_1 + \phi_2)} = r_1 * r_2 / \phi_1 + \phi_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1 * a_2 - b_1 * b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$



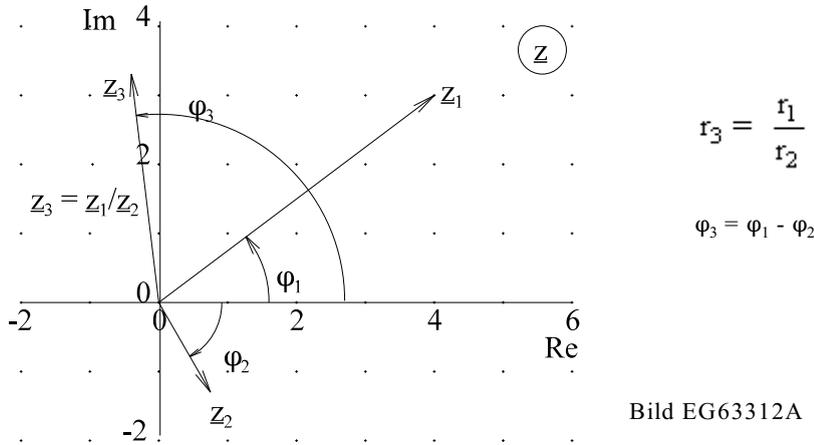
$$r_3 = r_1 * r_2$$

$$\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$$

Bild EG3311A: Grafische Multiplikation komplexer Zahlen

6.3.3.12. Division komplexer Zahlen

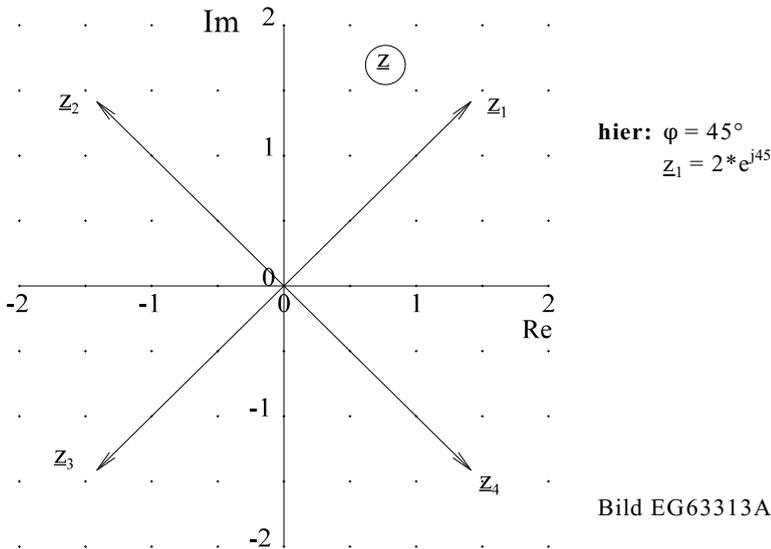
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 * e^{j\varphi_1}}{r_2 * e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} * e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \angle \varphi_1 - \varphi_2$$



6.3.3.13. Multiplikation einer komplexen Zahl mit Potenzen von j

$$z_1 = r * e^{j\varphi}$$

$$z_2 = r * e^{j\varphi} * j = r * e^{j\varphi} * e^{j90^\circ}$$



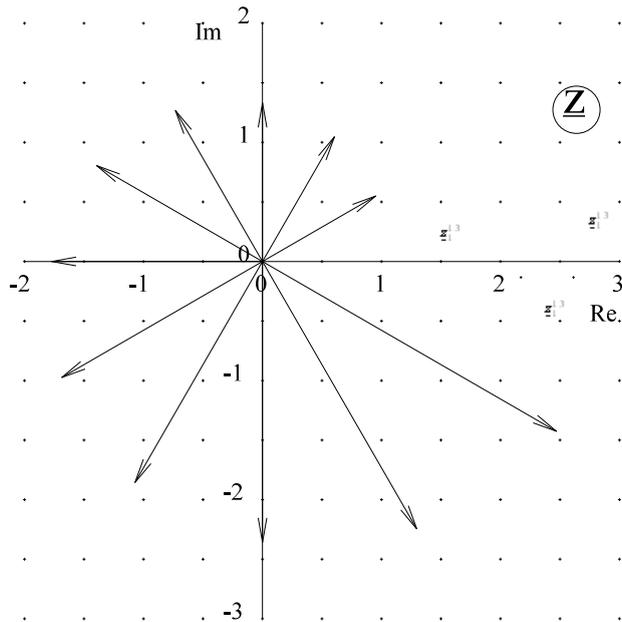
$$z_3 = r * e^{j\varphi} * j^2 = r * e^{j\varphi} * e^{j180^\circ}$$

$$z_4 = r * e^{j\varphi} * j^3 = r * e^{j\varphi} * e^{j270^\circ}$$

$$z_5 = r * e^{j\varphi} * 1/j = r * e^{j\varphi} * e^{-j90^\circ}$$

$$z_6 = r * e^{j\varphi} * (-j) = r * e^{j\varphi} * e^{-j90^\circ}$$

6.3.3.14. Potenzen einer komplexen Zahl



$$\underline{z}^n = (r * e^{j\varphi})^n = r^n * e^{j\varphi n}$$

$$\underline{z}^n = (r/\varphi)^n = r^n/\varphi * n$$

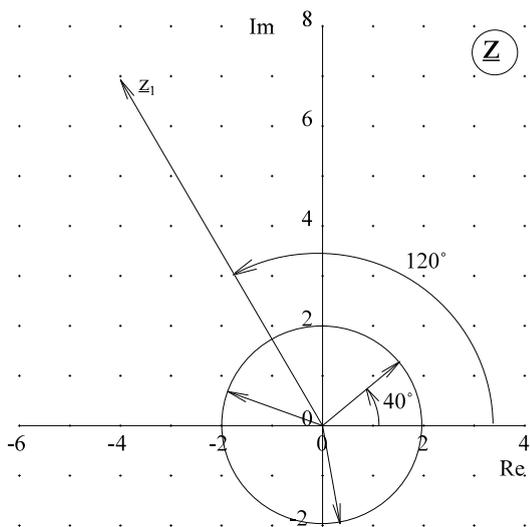
$$\underline{z}_1 = 1.1/30^\circ$$

$$\underline{z}_1^2 = 1.21 /60^\circ$$

$$\underline{z}_1^3 = 1.331 /90^\circ$$

Bild EG63314A

6.3.3.15. m-te Wurzel aus einer komplexen Zahl



$$\sqrt[m]{z} = z^{1/m} = (r * e^{j\varphi})^{1/m}$$

$$\sqrt[m]{z} = (r * e^{j\varphi} * e^{jn*360^\circ})^{1/m}$$

$$\sqrt[m]{z} = r^{1/m} * e^{j\varphi/m} * e^{jn/n*360^\circ}$$

$$\sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{r} \left| \frac{\varphi}{m} + \frac{n}{m} * 360^\circ \right|$$

$$\underline{z}_2 = \sqrt[3]{z_1}$$

$$r_1 = 8$$

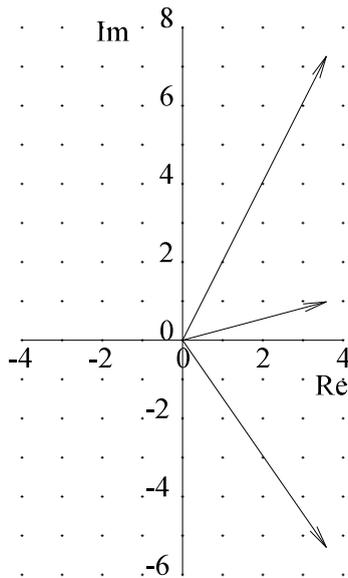
$$r_2 = \sqrt[3]{8} = 2$$

Bild EG63315A

6.3.3.16. Welche Operation in welcher Form

Kartesische Form	Polarform
Addition	Multiplikation
Subtraktion	Division
konjugiert komplex	Inversion
	Potenzierung
	Wurzelziehen
	konjugiert komplex

6.3.3.17. Logarithmus aus einer komplexen Zahl



$$\begin{aligned} \underline{z} &= r * e^{j\varphi} \\ \underline{z} &= r * e^{j\varphi} * e^{jn*2\pi} \\ \ln(\underline{z}) &= \ln[r * e^{j\varphi} * e^{jn*2\pi}] \\ \ln(\underline{z}) &= \ln(r) + \ln(e^{j\varphi}) + \ln(e^{jn*2\pi}) \\ \ln(\underline{z}) &= \ln(r) + j(\varphi + n*2\pi) \end{aligned}$$

$$\ln(20 + j30)$$

Bild EG63317A

6.3.3.18. Gleichheit komplexer Zahlen

$$\underline{z}_1 = a_1 + jb_1 = r_1 * e^{j\varphi_1}$$

$$\underline{z}_2 = a_2 + jb_2 = r_2 * e^{j\varphi_2}$$

$$\underline{z}_1 = \underline{z}_2 \quad \Rightarrow \quad [a_1 = a_2 \text{ und } b_1 = b_2] \quad \text{oder} \quad [r_1 = r_2 \text{ und } \varphi_1 = \varphi_2]$$

6.3.3.19. Differentiation nach dem Winkel

$$\begin{aligned} \underline{z} &= A * e^{j\varphi} \\ d\underline{z}/d\varphi &= jA * e^{j\varphi} = A * e^{j(\varphi+90^\circ)} = A/\underline{\varphi+90^\circ} = A/\underline{\varphi} * 1/90^\circ = \underline{z}^*/90^\circ \end{aligned}$$

Die Differentiation nach dem Winkel bedeutet eine Drehung um +90°.

6.3.3.20. Integration nach dem Winkel

$$\begin{aligned} \underline{z} &= A * e^{j\varphi} \\ \int \underline{z} d\varphi &= A * \int e^{j\varphi} d\varphi = \frac{1}{j} A * e^{j\varphi} = A * e^{j(-90^\circ)} = A/\underline{\varphi} * \underline{-90^\circ} = \underline{z}^*/\underline{-90^\circ} \end{aligned}$$

Die Integration nach dem Winkel bedeutet eine Drehung um -90°.

6.3.3.21. Schreibweise komplexer Zahlen

Hier soll die Spannung \underline{u} betrachtet werden. Das Ergebnis gilt auch für alle anderen komplexen physikalischen Größen, z.B. für I.

\underline{U} komplexe Zahl mit Unterstrich

$|\underline{U}| = U$ Beträge werden ohne Betragszeichen, nur mit den Buchstaben ohne Unterstrich gekennzeichnet

$$\underline{U} = U * e^{j\varphi}$$

$u(t)$ - Zeitabhängiger Verlauf

$\underline{u}(t)$ - rotierender Scheitelwertzeiger

\hat{u} - ruhender Scheitelwertzeiger

\underline{U} - Effektivwertzeiger

U - Betrag des Effektivwertes ($U = |\underline{U}|$)

Fazit:

- große Buchstaben für Effektivwert
- kleine Buchstaben für zeitabhängige Werte und Maximalwerte
- "hat" für Maximalwerte (Scheitelwerte, ruhend)

6.3.4. Wiederholungsaufgaben, Beispiele, Aufgaben und Fragen zu Kap. 6.1 bis Kap. 6.3

Wiederholungsaufgabe 1, Komplexe Rechnung

Rechnen Sie um in die Komponenten-Form.

gegeben: $z_1 = 8 \angle 60^\circ$ $z_2 = \sqrt{8} \angle -45^\circ$ $z_3 = 2 \cdot e^{j150^\circ}$ $z_4 = 3 \cdot e^{j230^\circ}$

Wiederholungsaufgabe 2, Komplexe Rechnung

Rechnen Sie um in die Exponential-Form und stellen Sie in zwei komplexen Ebenen dar.

gegeben: $z_1 = \sqrt{2} (1 + j)$ $z_2 = \sqrt{2} (1 - j)$ $z_3 = \sqrt{2} (-1 + j)$ $z_4 = \sqrt{2} (-1 - j)$
 $z_5 = 4 + j3$ $z_6 = 4 - j3$ $z_7 = -4 + j3$ $z_8 = -4 - j3$

Wiederholungsaufgabe 3, Komplexe Rechnung

Stellen Sie in einer Gauß'schen Zahlenebene dar:

gegeben: $z_1 = 5j^2$ $z_2 = 4j^3$ $z_3 = 3j^4$ $z_4 = -\frac{1}{2j}$

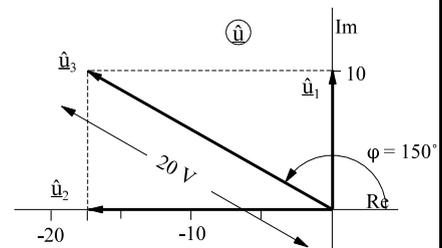
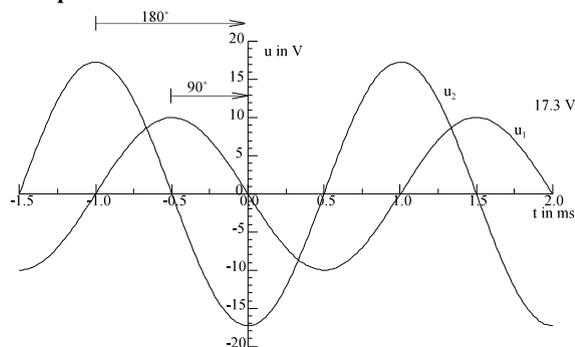
Wiederholungsaufgabe 4, Komplexe Rechnung

Gegeben sind die unteren zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 . Die angegebenen mathematischen Operationen sind auszuführen. Die Ausgangszahlen und das Ergebnis sind für jeden Unterpunkt in jeweils eine Gauß'sche Zahlenebene einzutragen

gegeben: $z_1 = 4 + j3$ $z_2 = 1.5 \cdot e^{-j60^\circ}$

- gesucht:
- Umformung in die jeweils andere Form $z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi}$, $z_2 = a_2 + jb_2$
 - $z_3 = z_1 + z_2$
 - $z_4 = -z_2$ $z_5 = z_1 - z_2$
 - $z_6 = z_1^*$ $z_7 = z_2^*$
 - $z_8 = z_1 \cdot z_2$ (2 Methoden)
 - $z_9 = 1/z_1$ (2 Methoden, 2 Zahlenebene, eine für z_1 eine für z_9)
 - $z_{10} = z_1/z_2$

Beispiel 1:



gesucht: $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t) = ?$

b) grafische Lösung

a) analytische Lösung

$$\hat{u}_1 = 10 \text{ V} \cdot \angle 90^\circ = 0 + j10 \text{ V}$$

$$\hat{u}_2 = 17.3 \text{ V} \cdot \angle 180^\circ = -17.3 \text{ V} + j0 \text{ V}$$

$$\hat{u}_3 = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 = j10 \text{ V} - 17.3 \text{ V} = -17.3 \text{ V} + j10 \text{ V}$$

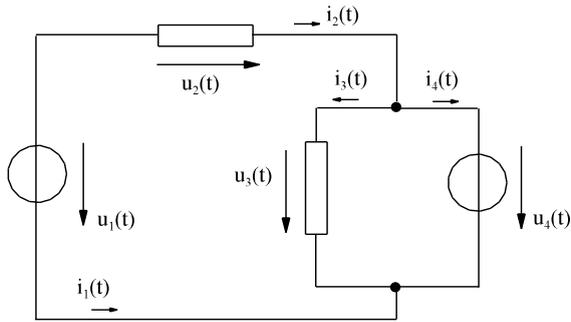
$$\hat{u}_3 = \sqrt{(17.3 \text{ V})^2 + (10 \text{ V})^2} \cdot \left| \arctan \frac{10 \text{ V}}{-17.3 \text{ V}} + 180^\circ = 20 \text{ V} \cdot \angle -30^\circ + 180^\circ = 20 \text{ V} \cdot \angle 150^\circ \right.$$

$$u_3(t) = 20 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 150^\circ)$$

$$T = 2 \text{ ms}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ ms}} = 0.5 \cdot 10^3 \text{ Hz} = 0.5 \text{ kHz}$$

$$\omega = 2 \pi \cdot f = 2 \pi \cdot 0.5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} = 3142 \text{ s}^{-1}$$

Beispiel 2:

gegeben:

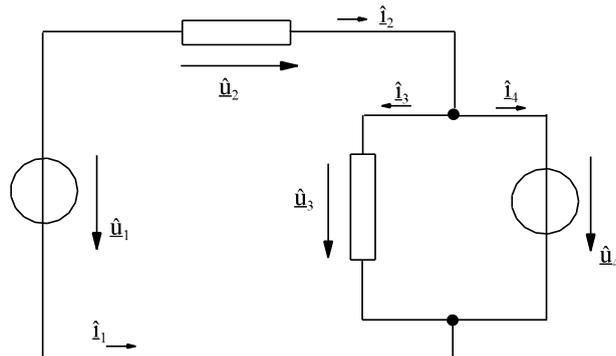
$$u_3(t) = 10 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 0^\circ)$$

$$u_2(t) = 17.3 \text{ V} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ)$$

$$i_3(t) = 100 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ)$$

$$i_2(t) = 141 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t - 135^\circ)$$

gesucht: $u_1(t), i_4(t), i_1(t)$



Die Zeitgrößen werden durch äquivalente rotierende Scheitelwertzeiger ersetzt.

$$\hat{u}_3 = 10 \text{ V} \cdot \underline{0^\circ} = 10 \text{ V} + j0 \text{ V}$$

$$\hat{u}_2 = 17.3 \text{ V} \cdot \underline{-90^\circ} = 0 \text{ V} - j17.3 \text{ V} \quad \hat{u}_1 = \hat{u}_2 + \hat{u}_3 = 10 \text{ V} - j17.3 \text{ V}$$

$$\hat{u}_1 = \sqrt{(10 \text{ V})^2 + (17.3 \text{ V})^2} \cdot \left| \arctan \frac{-17.3 \text{ V}}{10 \text{ V}} \right. = 20 \text{ V} \cdot \underline{-60^\circ}$$

$$\hat{u}_4 = \hat{u}_3$$

$$\hat{i}_3 = 100 \text{ mA} \cdot \underline{-90^\circ} = 0 - j100 \text{ mA}$$

$$\hat{i}_2 = 141 \text{ mA} \cdot \underline{-135^\circ} = -100 \text{ mA} - j100 \text{ mA}$$

$$\hat{i}_4 = \hat{i}_2 - \hat{i}_3 = -100 \text{ mA} - j100 \text{ mA} - 0 + j100 \text{ mA} = -100 \text{ mA} + j0 = 100 \text{ mA} \cdot \underline{180^\circ}$$

$$\hat{i}_1 = -\hat{i}_2 = 100 \text{ mA} + j100 \text{ mA} = 141 \text{ mA} \cdot \underline{45^\circ}$$

$$\hat{u}_1 = 20 \text{ V} \cdot \underline{-60^\circ}$$

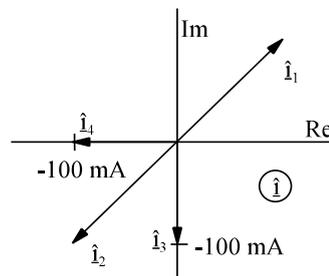
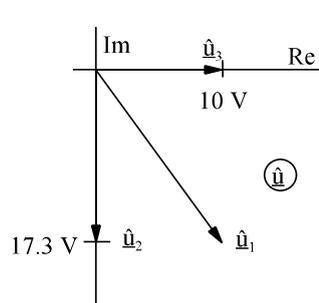
$$\Rightarrow u_1(t) = 20 \text{ V} \cdot \cos(\omega t - 60^\circ)$$

$$\hat{i}_1 = 141 \text{ mA} \cdot \underline{45^\circ}$$

$$\Rightarrow i_1(t) = 141 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t + 45^\circ)$$

$$\hat{i}_4 = 100 \text{ mA} \cdot \underline{180^\circ}$$

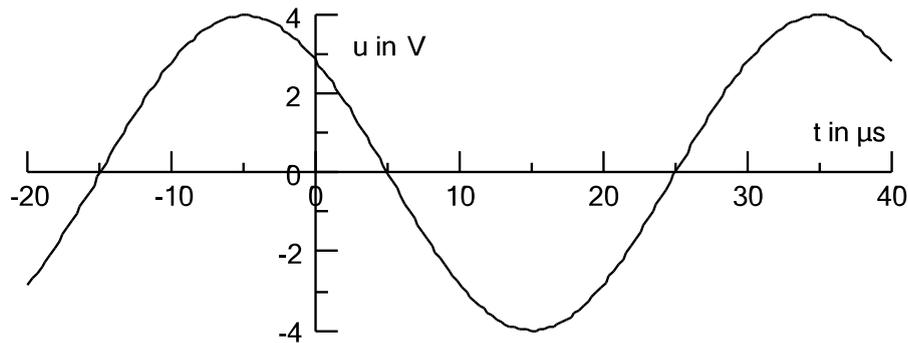
$$\Rightarrow i_4(t) = 100 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t + 180^\circ)$$



Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.6.3.A	Ein harmonische Größe ist eine Schwingung, die * nur der reinen Kosinusform entspricht * nur der reinen Sinusform entspricht * der Sinusform entsprechen kann * der Kosinusform entsprechen kann * nur eine Frequenzkomponente enthält * mehrere Frequenzanteile enthalten kann * drei Frequenzanteile enthalten kann	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.3.B	Harmonische Größen bestimmter Frequenz unterscheiden sich nur noch: * in Betrag und Winkel * in Frequenz und Winkel * in Amplitude und Phasenverschiebung * in Kreisfrequenz und Amplitude	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.3.C	Eine harmonische Größe wird normalerweise dargestellt in der Form: * $u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ * $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ * $i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$ * $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.3.D	Die mathematische Form des rotierendes Scheitelwertzeigers lautet: * $\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ * $\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}$ * $\hat{u} = \underline{\hat{u}} / \varphi$ * $\underline{U} = U \cdot \varphi$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.3.E	Die mathematische Form des ruhenden Scheitelwertzeigers lautet: * $\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ * $\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}$ * $\hat{u} = \underline{\hat{u}} / \varphi$ * $\underline{U} = U \cdot \varphi$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.3.F	Die mathematische Form des Effektivwertzeigers lautet: * $\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ * $\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}$ * $\hat{u} = \underline{\hat{u}} / \varphi$ * $\underline{U} = U \cdot \varphi$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.3.G	Der Zusammenhang zwischen Effektivwert und Scheitelwert einer harmonischen Größe lautet: * $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$ * $U = \hat{u} \cdot \sqrt{2}$ * $U = \hat{u} \cdot 2$ * $U = \frac{\hat{u}}{2}$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.3.H	In dem Term "cos($\omega t + \varphi$)" wird ω bezeichnet als: * Kreisfrequenz * mechanische Winkelgeschwindigkeit * elektrische Winkelgeschwindigkeit	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.3.I	Der Betrag einer komplexen Größe \hat{i} oder \hat{u} repräsentiert:	* die Frequenz * die Amplitude * die Phase	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.3.J	Der Winkel einer komplexen Größe \hat{i} oder \hat{u} repräsentiert:	* die Frequenz * die Amplitude * die Phase	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :			richtig	falsch
AF.6.3.K	Der Realteil einer komplexen Größe \hat{u} oder \underline{u} repräsentiert:	* die Frequenz * die Amplitude * die Phase	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.3.L	Der Imaginärteil einer komplexen Größe \hat{u} oder \underline{u} repräsentiert:	* die Frequenz * die Amplitude * die Phase	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Frage 6.3.A	Eine harmonische Größe ist eine Schwingung, die _____
Frage 6.3.B	Harmonische Größen bestimmter Frequenz unterscheiden sich nur noch: _____
Frage 6.3.C	Eine harmonische Größe wird normalerweise im Zeitbereich dargestellt in der Form: _____
Frage 6.3.D	Die mathematische Form des rotierendes Scheitelwertzeigers lautet: _____
Frage 6.3.E	Die mathematische Form des ruhenden Scheitelwertzeigers lautet: _____
Frage 6.3.F	Die mathematische Form des Effektivwertzeigers lautet: _____
Frage 6.3.G	Der Zusammenhang zwischen Effektivwert und Scheitelwert einer harmonischen Größe lautet: _____
Frage 6.3.H	In dem Term " $\cos(\omega t + \varphi)$ " wird ω bezeichnet als: _____
Frage 6.3.I	Der Betrag einer komplexen Größe \hat{u} oder \underline{u} repräsentiert: _____
Frage 6.3.J	Der Winkel einer komplexen Größe \hat{u} oder \underline{u} repräsentiert: _____
Frage 6.3.K	Der Zusammenhang zwischen ω und f lautet: _____
Frage 6.3.L	Der Zusammenhang zwischen ω und T lautet: _____
Frage 6.3.M	Der Zusammenhang zwischen T und f lautet: _____

Aufgabe 6.3.A:

Geben Sie für oben dargestellten Spannungszeitverlauf an:

- Mathematischen Zeitverlauf
- Rotierender Scheitelwertzeiger, mathematisch
- Rotierender Scheitelwertzeiger, grafisch, für $\omega t = 0$ und $\omega t = 90^\circ$
- Ruhender Scheitelwertzeiger, mathematisch
- Ruhender Scheitelwertzeiger, grafisch
- Effektivwertzeiger, mathematisch
- Effektivwertzeiger, grafisch
- Periodendauer T
- Frequenz f
- Kreisfrequenz ω

Aufgabe 6.3.B

Geben Sie für den Effektivwertzeiger an:

$$\underline{I} = 14.14 \text{ mA } \angle -120^\circ$$

$$T = 2 \text{ } \mu\text{s}$$

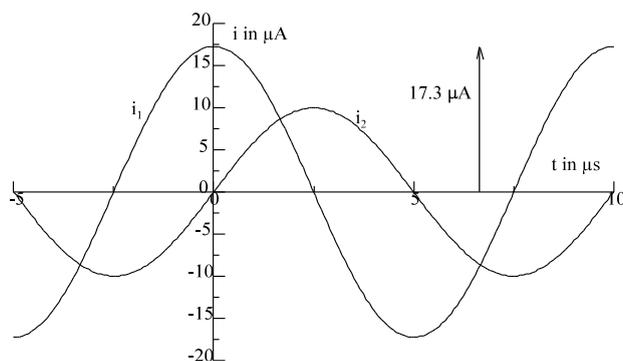
- Frequenz f
- Kreisfrequenz ω
- Effektivwertzeiger, grafisch
- Ruhender Scheitelwertzeiger, mathematisch
- Ruhender Scheitelwertzeiger, grafisch
- Rotierender Scheitelwertzeiger, mathematisch
- Mathematischen Zeitverlauf
- Zeitverlauf, grafisch

Aufgabe 6.3.C:

$$u_1(t) = 4 \text{ V } \cos(\omega t + 45^\circ)$$

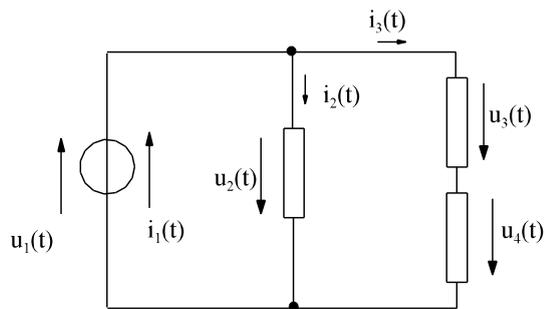
$$u_2(t) = 10 \text{ V } \cos(\omega t - 60^\circ)$$

- $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$
- $u_4(t) = u_1(t) - u_2(t)$

Aufgaben 6.3.D

gesucht: $T, f, \omega, i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$

Aufgaben 6.3.E



gegeben:

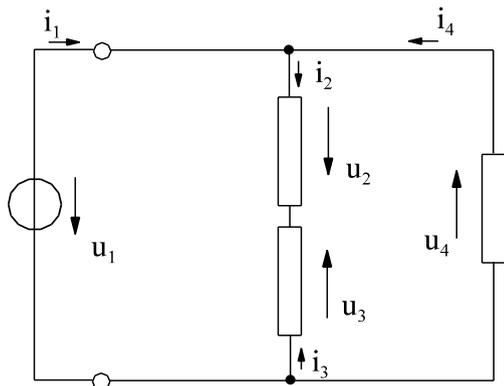
$$u_2(t) = 28.3 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 180^\circ)$$

$$u_3(t) = 20 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 135^\circ)$$

$$i_2(t) = 10 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t - 180^\circ)$$

$$i_3(t) = 17.3 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ)$$

gesucht: $i_1(t)$, $u_4(t)$, $u_1(t)$
Zeigerdiagramm (getrennt nach u, i) aller Größen



Aufgabe 6.3.F:

gegeben:

$$u_2(t) = 10 \text{ V} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ)$$

$$u_3(t) = 10 \text{ V} \cdot \cos(\omega t - 150^\circ)$$

$$i_2(t) = 20 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t)$$

$$i_4(t) = 20 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t + 90^\circ)$$

gesucht: $u_1(t)$, $u_4(t)$, $i_1(t)$ und $i_3(t)$

Bestimmen Sie die gesuchten Zeitverläufe
a) Mathematisch mit Hilfe der komplexen Rechnung.
b) Grafisch in der komplexen Zahlenebene.

6.4. Kennwerte von zeitabhängigen Größen	30
6.4.1. Arithmetischer Mittelwert	30
6.4.2. Quadratischer Mittelwert	32
6.4.3. Mittelwert eines Signals mit mehreren Abschnitten	35
6.4.4. Gleichrichtwert	36
6.4.5. Formfaktor	36
6.4.6. Kennwerte von nicht harmonischen Wechselgrößen	37
6.4.7. Mittelwerte von Standardsignalen	39
6.4.8. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 6.4	41
6.5. Einfache Schaltungen	46
6.5.1. Widerstand R	46
6.5.2. Induktivität L	49
6.5.3. Kapazität C	52
6.5.4. Phasenverschiebung	55
6.5.6. Komplexe Behandlung von Spannungsquellen	58
6.5.7. Reihenschaltung R-L	58
6.5.8. Reihenschaltung R-C	61
6.5.9. Parallelschaltung R-C	64
6.5.10. Komplexes ohmsches Gesetz, komplexer Widerstand und Leitwert	66
6.5.11. Leistung	67
6.5.12. Beispiele, Aufgaben und Fragen zu Kap. 6.5	70

6.4. Kennwerte von zeitabhängigen Größen

Was wird mit dem Messgerät an einer zeitabhängigen Größe gemessen? Der Zeitwert kann z.B. bei $f = 50$ Hz nicht angezeigt werden, weil dieser sich zu schnell ändert. Bei einem Zeigermeßgerät kann die Masse aufgrund der Trägheit nicht dem Messsignal folgen. Es wird eine Art Mittelwert gemessen. Es gibt verschiedene Arten von Mittelwerten:

- arithmetischer Mittelwert
- quadratischer Mittelwert
- Gleichrichtwert

Drehspulmessgeräte zeigen den arithmetischen Mittelwert ($\alpha \sim i$) an und Dreheisen-Messgeräte den quadratischen Mittelwert ($\alpha \sim i^2$).

6.4.1. Arithmetischer Mittelwert

Der arithmetische Mittelwert ergibt sich aus dem konstanten Wert, der die gleiche Fläche zur Folge hat, als der Verlauf $y(t)$, siehe Bild EG641A.

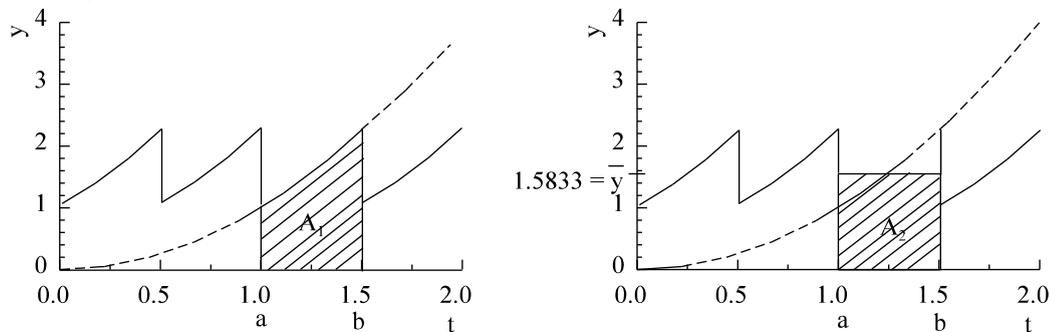


Bild EG641A

Aus den Gleichsetzen der Flächen A_1 und A_2

$$A_1 = \int_{t=a}^b y(t) dt$$

$$A_2 = \bar{y} (b - a)$$

ergibt sich

$$\int_{t=a}^b y(t) dt = \bar{y} (b - a)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{b - a} \int_{t=a}^b y(t) dt$$

Der arithmetische Mittelwert ergibt sich durch Integration über t des betrachteten Bereiches und anschließender Division durch die Breite in t des Bereiches.

Beispiel 1:

Für die in Bild EG641A dargestellte Funktion

$$y(t) = \left(\frac{t}{1 \text{ s}} \right)^2$$

soll der Mittelwert im Bereich $t = 1 \text{ s}$ bis $t = 1.5 \text{ s}$ festgestellt werden.

$$\bar{y} = \frac{1}{1.5 - 1 \text{ s}} \int_{t=1 \text{ s}}^{1.5 \text{ s}} \frac{t^2}{(1 \text{ s})^2} dt = \frac{1}{3 * 0.5 \text{ s}^3} t^3 \Big|_{t=1 \text{ s}}^{1.5 \text{ s}} = \frac{1}{1.5 \text{ s}^3} [(1.5 \text{ s})^3 - (1 \text{ s})^3] = 1.5833$$

Hinweis: Normal ist, den Mittelwert eines periodischen Signals in den Grenzen der Periodendauer zu berechnen.

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_{t=t_1}^{t_1+T} y(t) dt$$

Beispiel 2: Der arithmetische Mittelwert einer harmonischen Größe

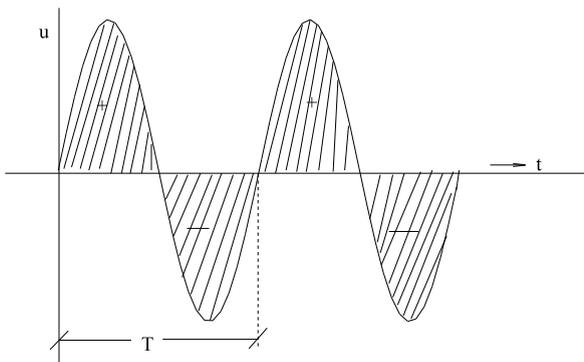


Bild EG641B

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int \hat{u} * \sin(\omega t) dt$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\omega T} \int_{\alpha=0}^{2\pi} u(\omega t) d(\omega t)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\alpha) d(\alpha)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \hat{u} * \sin(\alpha) d(\alpha) = - \frac{\hat{u}}{2\pi} \cos(\alpha) \Big|_{\alpha=0}^{2\pi} = 0$$

Fazit: Der arithmetische Mittelwert einer rein harmonischen Größe ist Null. **Der arithmetische Mittelwert einer reinen Wechselgröße (Summe von Harmonischen) ist Null.**

6.4.2. Quadratischer Mittelwert

An der Steckdose sind nominell 230 V Wechselspannung vorhanden.

Versuch: Messen der Spannung an der Steckdose mit dem Oszillographen.

Ergebnis:

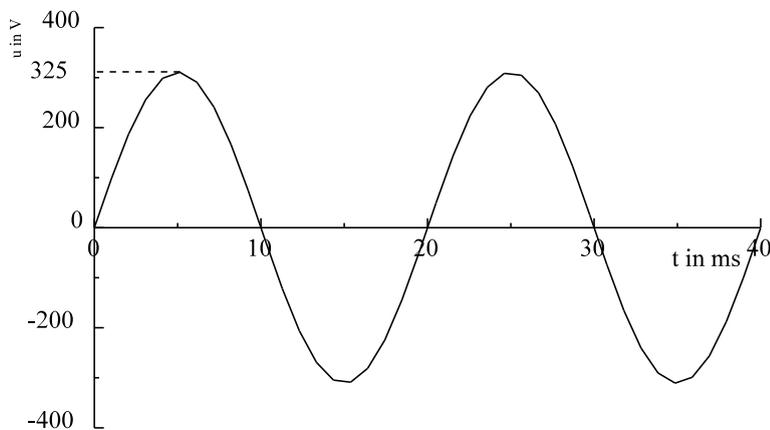


Bild EG624A

Es wird ein Maximalwert von 325 V bei einer Periodendauer von 20 ms gemessen.

$$\frac{325 \text{ V}}{230 \text{ V}} = 1.41 = \sqrt{2} \quad \text{!!!!Faktor } \sqrt{2} \quad \text{!!!!}$$

Der Faktor $\sqrt{2}$ wurde in Kap. 6.2.4 schon als Unterschied zwischen Effektivwert und Scheitelwert erwähnt. Hier soll nun die mathematisch physikalische Erklärung für den Effektivwert erfolgen.

Beispiel 1:

Für einen ohmschen Widerstand R in dem der Strom

$$i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t)$$

fließt, soll der Wert I (Effektivwert) bestimmt werden, für den gilt:

$$P = \overline{p(t)} = I^2 \cdot R$$

Nach der obigen Formel ergibt sich dann mit Hilfe des Effektivwertes der Mittelwert der Leistung wie bei Gleichstrom.

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = [R \cdot i(t)] \cdot i(t) = R \cdot [i(t)]^2$$

$$I^2 \cdot R = \overline{p(t)} = \overline{R \cdot [i(t)]^2} = R \cdot \overline{[i(t)]^2}$$

$$I = \sqrt{\overline{[i(t)]^2}} \quad I = \sqrt{\overline{i^2}}$$

Der quadratische Mittelwert ist somit die Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrats der betrachteten Größe.

Für eine periodische Funktion $i(t)$ muss zur Bestimmung des Mittelwertes über eine Periode integriert werden und durch die Periodendauer dividiert werden.

Mathematische Berechnung des quadratischen Mittelwertes allgemein:

$$U = U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} u^2(\alpha) d\alpha} \quad \alpha = \omega t$$

$$I = I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} i^2(\alpha) d\alpha}$$

$$P = \overline{p(t)} = \frac{1}{T} \int_{(T)} p(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} p(\alpha) d\alpha$$

Bei den oberen Formeln wurde auf der rechten Seite über α integriert. Dieses ist im allgemeinen einfacher, weil durch die dimensionslose Periodendauer 2π sich besser dividieren lässt als durch ω .

Konvention und Zusammenfassung

Effektivwerte sind quadratische Mittelwerte und entsprechen äquivalenten Gleichstromwerten, die mit großen Buchstaben bezeichnet werden, der Index eff entfällt.

zeitabhängige Größen:	kleine Buchstaben	$u(t), \quad i(t), \quad p(t)$
Effektivwerte:	große Buchstaben	$U, \quad I, \quad P$
Gleichstromgrößen:	große Buchstaben	$U \quad I, \quad P$
harmonische Größe:	$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$	$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$
Leistung, Gleichstrom:	an R	$P = I^2 * R = \frac{U^2}{R}$
Leistung, Wechselstrom:	an R	$P = I^2 * R = \frac{U^2}{R}$

Beweis $\sqrt{2}$:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} i^2(t) dt}$$

$$i(t) = \hat{i} * \sin(\omega t)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t=0}^T \hat{i}^2 * \sin^2(\omega t) dt}$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\alpha)]$$

$$I = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{T} \int_{t=0}^T \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega t)] dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{2T} \left[\int_{t=0}^T dt - \int_{t=0}^T \cos(2\omega t) dt \right]}$$

Das obere rechte Integral ist der Mittelwert über zwei Perioden einer harmonischen Funktion, ergibt also Null:

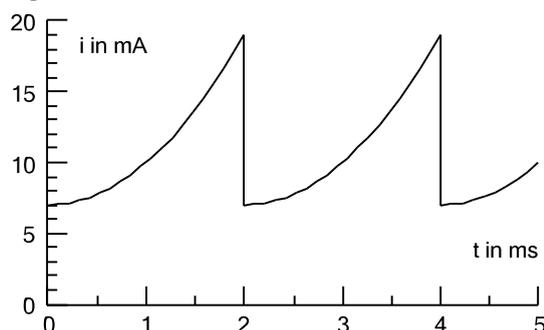
$$\int_{t=0}^T \cos(2\omega t) dt = 0$$

$$\int_{t=0}^T dt = t \Big|_{t=0}^T = T$$

$$I = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{2T} * T} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{2}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

Damit ist der Faktor $\sqrt{2}$ bestätigt.

Beispiel 2:



Für den links dargestellten Zeitverlauf sind der arithmetische Mittelwert \bar{i} und der Effektivwert I zu bestimmen. Das Signal ist parabelförmig (Parabel 2. Ordnung) mit der Steigung Null bei $t = 0$.

Ansatz für $i(t)$:
$$i(t) = 7mA + 12mA * \left(\frac{t}{2ms}\right)^2 = 7mA + 12mA * \frac{t^2}{(2ms)^2}$$

$$\bar{i} = \frac{1}{2ms} \int_{t=0}^{2ms} \left[7mA + 12mA * \frac{t^2}{(2ms)^2} \right] dt = \frac{1}{2ms} \left[7mA * t + \frac{12mA}{3} * \frac{t^3}{(2ms)^2} \right]_{t=0}^{2ms}$$

$$\bar{i} = \frac{1}{2ms} \left[7ms * 2ms + 4mA * \frac{(2ms)^3}{(2ms)^2} \right] = 7mA + 4mA = 11mA$$

$$i^2(t) = (7mA)^2 + 2 * 7mA * 12mA * \frac{t^2}{(2ms)^2} + (12mA)^2 * \frac{t^4}{(2ms)^4}$$

$$i^2(t) = \left[49 + 168 * \frac{t^2}{(2ms)^2} + 144 * \frac{t^4}{(2ms)^4} \right] * (mA)^2$$

$$\frac{1}{2ms} \int_{t=0}^{2ms} i^2(t) dt = \frac{1}{2ms} \left[49t + \frac{168}{3} * \frac{t^3}{(2ms)^2} + \frac{144}{5} * \frac{t^5}{(2ms)^4} \right] * (mA^2) \Big|_{t=0}^{2ms}$$

$$\frac{1}{2ms} \int_{t=0}^{2ms} i^2(t) dt = \frac{1}{2ms} \left[49 * 2ms + 56 * \frac{(2ms)^3}{(2ms)^2} + \frac{144}{5} * \frac{(2ms)^5}{(2ms)^4} \right] * (mA^2)$$

$$\frac{1}{2ms} \int_{t=0}^{2ms} i^2(t) dt = \frac{1}{2ms} \left[49 + 56 + \frac{144}{5} \right] * (mA^2) = 133.8 (mA^2)$$

$$I = \sqrt{133.8 (mA^2)} = 11.57mA$$

6.4.3. Mittelwert eines Signals mit mehreren Abschnitten

Setzt sich ein Signal nach Bild EG643A aus mehreren Abschnitten

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ u(t) &= u_2(t) & t_1 \leq t \leq t_1 + t_2 \end{aligned}$$

zusammen, muss der Integrationsweg unterbrochen werden und in zwei Abschnitten integriert werden.

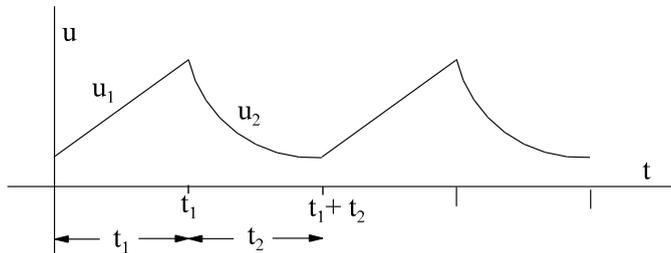


Bild EG643A: Mittelwertberechnung, Signal mit zwei Abschnitten

Für den arithmetischen Mittelwert ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{t_1+t_2} \int_0^{t_1+t_2} u(t) dt = \frac{1}{t_1+t_2} \int_0^{t_1} u_1(t) dt + \frac{1}{t_1+t_2} \int_{t_1}^{t_1+t_2} u_2(t) dt \\ \bar{u} &= \frac{t_1}{t_1+t_2} * \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} u_1(t) dt + \frac{t_2}{t_1+t_2} * \frac{1}{t_2} \int_{t_1}^{t_1+t_2} u_2(t) dt \end{aligned}$$

Mit den Mittelwerten der einzelnen Abschnitte

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} u_1(t) dt \qquad \bar{u}_2 = \frac{1}{t_2} \int_{t_1}^{t_1+t_2} u_2(t) dt$$

kann der gesamte Mittelwert angegeben werden:

$$\boxed{\bar{u} = \frac{t_1}{t_1+t_2} * \bar{u}_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2} * \bar{u}_2}$$

Die obere Formel stellt eine gewichtete Mittelwertbildung der einzelnen Bereiche dar, wobei das Gewicht dem Verhältnis der Anteilsdauer zur Periodendauer entspricht.

Für den quadratischen Mittelwert (Effektivwert) ergibt sich:

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{1}{t_1+t_2} \int_0^{t_1+t_2} u^2(t) dt = \frac{1}{t_1+t_2} \int_0^{t_1} u_1^2(t) dt + \frac{1}{t_1+t_2} \int_{t_1}^{t_1+t_2} u_2^2(t) dt \\ U^2 &= \frac{t_1}{t_1+t_2} * \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} u_1^2(t) dt + \frac{t_2}{t_1+t_2} * \frac{1}{t_2} \int_{t_1}^{t_1+t_2} u_2^2(t) dt \end{aligned}$$

Mit den Mittelwerten der einzelnen Abschnitte

$$U_1 = \sqrt{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} u_1^2(t) dt} \qquad U_2 = \sqrt{\frac{1}{t_2} \int_{t_1}^{t_1+t_2} u_2^2(t) dt}$$

kann der gesamte Mittelwert angegeben werden:

$$U = \sqrt{\frac{t_1}{t_1+t_2} * U_1^2 + \frac{t_2}{t_1+t_2} * U_2^2}$$

Die obere Formel stellt wieder eine gewichtete Mittelwertbildung der einzelnen Bereiche dar, wobei das Gewicht auch wieder dem Verhältnis der Anteilsdauer zur Periodendauer entspricht. Da es sich um den quadratischen Mittelwert handelt, müssen die einzelnen Mittelwerte quadriert werden. Die gewichtete Summe ist anschließend zu radizieren.

6.4.4. Gleichrichtwert

Eine weitere wichtige Größe ist der Gleichrichtwert.

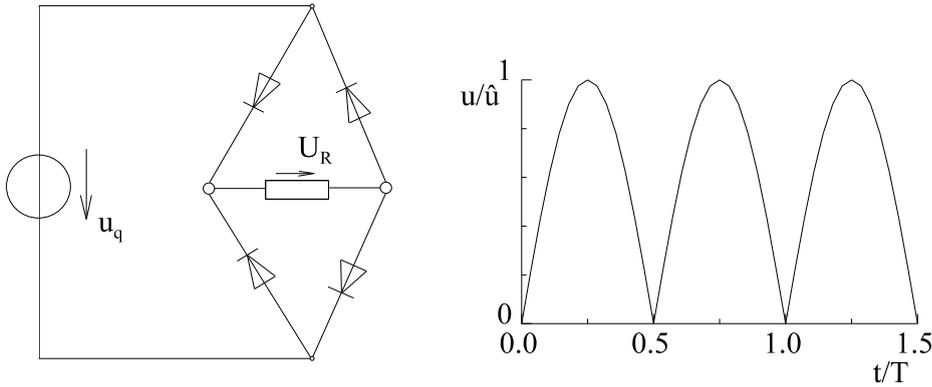


Bild EG644A

Manchmal werden Wechselspannungen gleichgerichtet, um sie dann mit einem Drehspulmessgerät zu messen. Die reine Wechselspannung mit einem Drehspulmessgerät zu messen, bringt nichts, weil der arithmetische Mittelwert Null ist und somit keine Anzeige erfolgt. Die obere Schaltung sorgt dafür, dass von der Spannung $u_q(t)$ der Betrag gebildet wird. Entsprechend ist auch die mathematische Vorschrift für den Gleichrichtwert: Es ist der arithmetische Mittelwert vom Betrag einer Größe zu bilden

$\overline{ u } = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T u(t) dt$
$\overline{ u } = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} u(\alpha) d\alpha$

Weil durch die Gleichrichtung die Periodendauer sich halbiert hat, kann bei der oberen Schwingung der Mittelwert nur über einen Bereich von 180° gebildet werden. Angewandt auf die obere Größe ergibt sich:

$$\overline{|u|} = \frac{\hat{u}}{\pi} * \int_{\alpha=0}^{\pi} \sin(\alpha) d\alpha = \frac{\hat{u}}{\pi} [-\cos(\alpha)] \Big|_{\alpha=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi} * \hat{u}$$

$$\overline{|u|} = \frac{2}{\pi} * \hat{u} = 0.637 * \hat{u} \quad \text{für harmonische Größe}$$

Hinweis: Falls der Verlauf $u(t)$ Nullstellen aufweist, müssen diese gefunden werden und die einzelnen Anteile mit entsprechendem Vorzeichen addiert werden.

6.4.5. Formfaktor

Der Formfaktor ist das Verhältnis von Effektivwert zu Gleichrichtwert:

$$F_u = \frac{U}{\overline{|u|}} \qquad F_i = \frac{I}{\overline{|i|}}$$

Insbesondere für nicht harmonische Größen ist der Formfaktor ein Maß für die Kurvenform.

Für harmonische Größen gilt:

$$F_u = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} * \hat{u}}{\frac{2}{\pi} * \hat{u}} = \frac{\pi}{2 * \sqrt{2}} = 1.11$$

6.4.6. Kennwerte von nicht harmonischen Wechselgrößen

Die Definitionen von arithmetischen Mittelwert, quadratischen Mittelwert, Gleichrichtwert und Formfaktor sind schon bekannt (siehe Kap. 6.4.1 bis 6.4.5). Hier sollen diese Vorschriften auf nicht harmonischen Wechselgrößen angewendet werden.

Die allgemeine Form einer periodischen Wechselgröße

$$u(t) = \sqrt{2} * U_1 * \cos(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2} * U_2 * \cos(2\omega t + \varphi_2) \\ + \sqrt{2} * U_3 * \cos(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$

ergibt sich aus Grundschwingung plus Überlagerung der Oberschwingungen.

6.4.6.1. Arithmetischer Mittelwert

$$u(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots$$

$$\overline{u(t)} = \overline{f_1(t)} + \overline{f_2(t)} + \overline{f_3(t)} + \dots$$

Um den Mittelwert zu erhalten, müssen die Mittelwerte einer jeden Schwingung aufsummiert werden, und die sind nach Kap. 6.4.1. bekanntlich Null. Also ist auch der gesamte arithmetischer Mittelwert Null.

$$\bar{u} = 0$$

Der Mittelwert einer reinen Wechselgröße ist Null.

6.4.6.2. Quadratischer Mittelwert

$$u^2(t) = 2 * U_1^2 * \cos^2(\omega t + \varphi_1) \\ + 2 * U_2^2 * \cos^2(2\omega t + \varphi_2) \\ + 2 * U_3^2 * \cos^2(3\omega t + \varphi_3) \\ + \dots \\ + 2 * (\sqrt{2})^2 * U_1 * U_2 * \cos(\omega t + \varphi_1) * \cos(2\omega t + \varphi_2) \\ + \dots$$

Das Quadrat einer allgemeinen periodischen Wechselgröße setzt sich aus zwei Hauptteilen zusammen. Und zwar aus den Quadraten der Einzelschwingungen und aus den gemischten Produkten. Die gemischten Produkte haben keinen Anteil am quadratischen Mittelwert, weil gilt:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(mx) * \cos(nx) dx = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

Mit der Formel

$$U = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} u^2(\alpha) d\alpha}$$

ergibt sich mit

$$\cos^2(\omega_i t + \varphi_i) = \frac{1}{2} [\cos(2\omega_i t + 2\varphi_i) + 1]$$

und

$$\overline{u^2(t)} = 2 * \frac{1}{2} U_1^2 + 2 * \frac{1}{2} U_2^2 + 2 * \frac{1}{2} U_3^2 + \dots$$

der quadratische Mittelwert einer allgemein periodischen Wechselgröße

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}$$

als die Wurzel der Summe aus den Effektivwerten der Grundschwingung und der Summe der Oberschwingungen.

Falls $u(t)$ den Gleichanteil U_G aufweist

$$u(t) = U_G + \sqrt{2} U_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \sqrt{2} U_2 \cdot \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots$$

lässt sich ohne Herleitung angeben:

$$U = \sqrt{U_G^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}$$

6.4.6.3. Grundschwingungsgehalt

Der Grundschwingungsgehalt gibt das Verhältnis des Grundschwingungseffektivwertes zum gesamten Effektivwert an.

$$g_u = \frac{U_1}{U} = \frac{U_1}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}}$$

6.4.6.4. Klirrfaktor

Der Klirrfaktor, auch Oberschwingungsgehalt oder Verzerrungsgehalt genannt, gibt das Verhältnis der Effektivwerte von Oberschwingung zur gesamten Wechselgröße an.

Effektivwert der Oberschwingungen:

$$U_d = \sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 \dots}$$

$$k_u = d_u = \frac{U_d}{U} = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}}$$

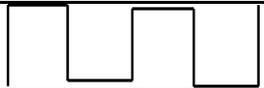
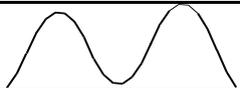
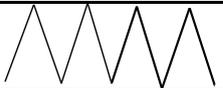
$$k_u = d_u = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U} = \frac{U_d}{U} = \sqrt{1 - g_u^2}$$

$$U^2 - U_1^2 = U_d^2$$

$$d_u^2 + g_u^2 = 1 = k_u^2 + g_u^2$$

6.4.6.5. Zahlenwerte für spezielle Formen

Für drei Formen sind in der folgenden Tabelle der quadratische Mittelwert, der Gleichrichtwert und der Formfaktor dargestellt.

			
	Rechteckform	Sinusform	Dreieckform
quadratischer Mittelwert U	\hat{u}	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 0.707 \hat{u}$	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} = 0.577 \hat{u}$
Gleichrichtwert $ \overline{u} $	\hat{u}	$\hat{u} \cdot \frac{2}{\pi} = 0.637 \hat{u}$	$\frac{\hat{u}}{2} = 0.5 \hat{u}$
Formfaktor F	1	1.11	1.15
g_u	0.900	1	0.9927
$d_u = k_u$	0.435	0	0.1202

6.4.6.6. Scheitelwert

Bei einer harmonischen Größe ist der Scheitelwert und die Amplitude \hat{u} gleich.

harmonisch: Scheitelwert = \hat{u}

Bei einer nicht harmonischen Wechselgröße ist der Scheitelwert der Maximalwert.

6.4.7. Mittelwerte von Standardsignalen

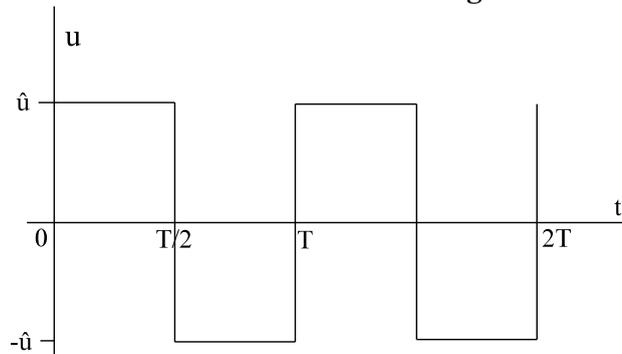


Bild EG647A: Rechtecksignal

Für das Rechtecksignal nach Bild EG647A ergibt sich:

$$U = \hat{u} \quad \bar{u} = 0 \quad |\bar{u}| = \hat{u} \quad F_u = 1$$

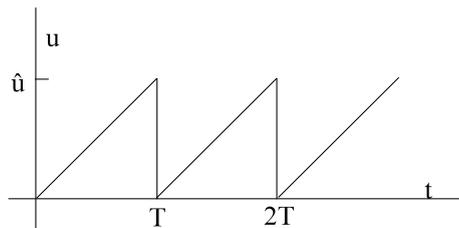


Bild EG647B: Sägezahnsignal

Für das Sägezahnsignal (Gerade durch Null) nach Bild EG647B mit dem Zeitverlauf

$$u(t) = \hat{u} * \frac{t}{T}$$

wird der arithmetische Mittelwert berechnet:

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \hat{u} * \frac{t}{T} dt = \frac{1}{T^2} * \hat{u} * \frac{1}{2} * t^2 \Big|_{t=0}^T = \frac{\hat{u}}{2}$$

Der arithmetische Mittelwert einer Geraden hätte durch Anschauung auch leichter ermittelt werden können aus dem Mittelwert von Maximal- und Minimalwert. Der quadratische Mittelwert des Sägezahnsignal nach Bild EG647B wird berechnet:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int \hat{u}^2 * \frac{t^2}{T^2} dt} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T^3} * \frac{t^3}{3} \Big|_{t=0}^T} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T^3} * \frac{T^3}{3}}$$

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$$

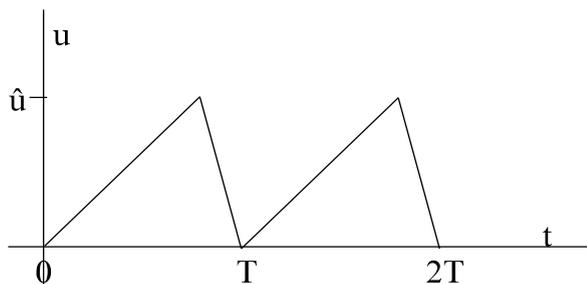


Bild EG647C: Schiefer-Sägezahnsignal

Das Signal des schiefen Sägezahnsignals nach Bild EG647C setzt sich aus zwei Sägezahnsignalen nach Bild

EG647B zusammen und weist damit die gleichen Mittelwerte auf als das Signal nach Bild EG647B:

$$\bar{u} = \frac{\hat{u}}{2} \qquad U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$$

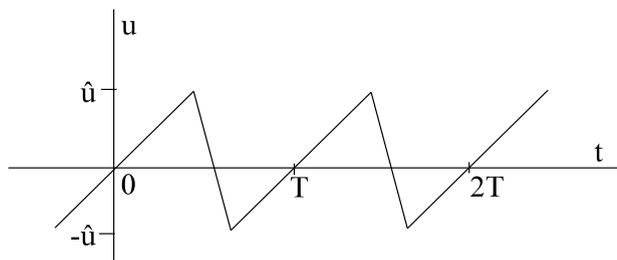


Bild EG647D: Sägezahnsignal mit negativen Signalanteil

Auch für das Sägezahnsignal (Sonderfall Dreiecksignal) mit negativen Signalanteilen nach Bild EG647D ergeben sich nur Geraden durch Null mit gleichen positiven und negativen Flächen, sodass für den Effektivwert wieder gilt:

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$$

Zu beachten ist, dass beim Vergleichen der Bilder EG647D und EG647C der Spitze-Spitze-Wert unterschiedlich ist, aber der Effektivwert gleich ist. Für das Signal nach Bild EG647D ist der arithmetische Mittelwert (Gleichspannungswert):

$$\bar{u} = u_{DC} = 0$$

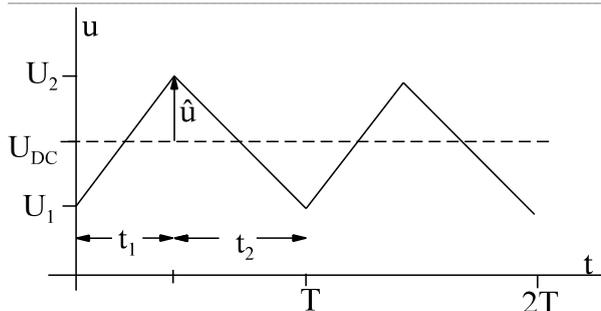


Bild EG647E: Schiefer-Sägezahnsignal mit Gleichanteil

Für den schiefen Sägezahn (Sonderfall $t_1 = t_2$ ist Dreiecksignal) nach Bild EG647E ergibt sich der arithmetische Mittelwert oder der Gleichspannungswert zu:

$$\bar{u} = U_{DC} = \frac{U_2 + U_1}{2}$$

Nach Bild EG647E ist der Scheitelwert des Wechselsignals ablesbar:

$$\hat{u} = \frac{U_2 - U_1}{2}$$

Über die Formel des Effektivwertes eines Dreiecksignals ergibt sich:

$$u_{AC} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} = \frac{U_2 - U_1}{\sqrt{3} * 2}$$

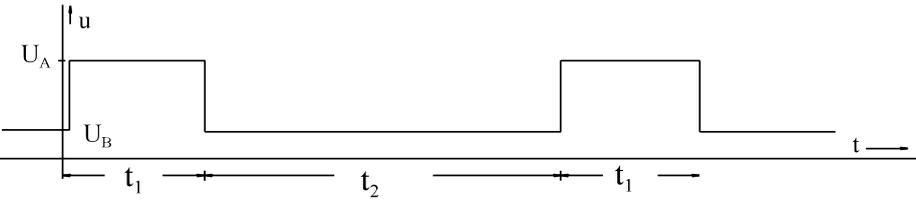
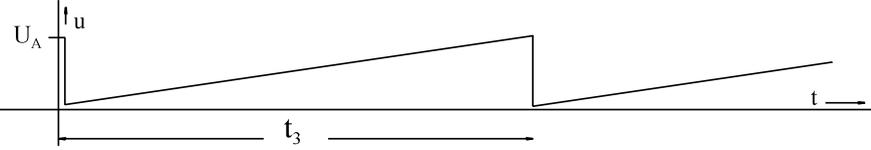
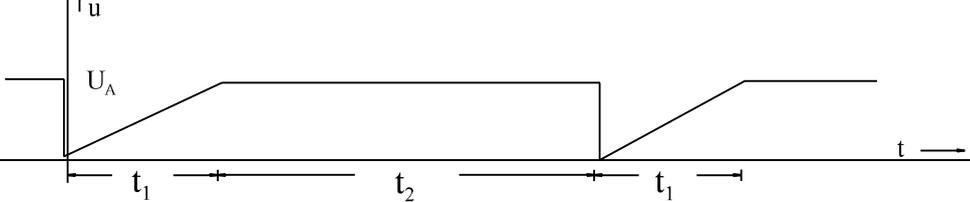
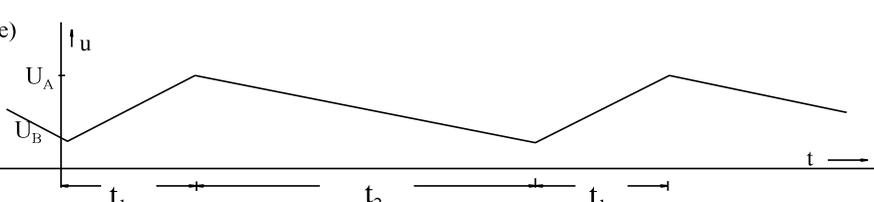
Damit lässt sich der Effektivwert des schiefen Sägezahnsignals (Dreiecksignals) mit Gleichanteil berechnen:

$$U = \sqrt{U_{DC}^2 + U_{AC}^2} = \sqrt{\left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{U_2 - U_1}{\sqrt{3} * 2}\right)^2} = \sqrt{\frac{U_1^2 + 2 * U_1 * U_2 + U_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - 2 * U_1 * U_2 + U_1^2}{12}}$$

$$U = \sqrt{\frac{3 * U_1^2 + 6 * U_1 * U_2 + 3 * U_2^2 + U_2^2 - 2 * U_1 * U_2 + U_1^2}{12}} = \sqrt{\frac{4 * U_1^2 + 4 * U_1 * U_2 + 4 * U_2^2}{12}}$$

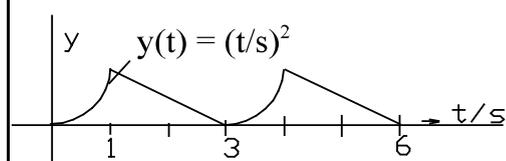
$$U = \sqrt{\frac{U_1^2 + U_1 * U_2 + U_2^2}{3}}$$

6.4.8. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 6.4

Beispiel 1:	 $\bar{u} = U_A \cdot \frac{t_1}{t_1 + t_2} + U_B \cdot \frac{t_2}{t_1 + t_2}$ $U = \sqrt{\frac{t_1}{t_1 + t_2} \cdot U_A^2 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} \cdot U_B^2}$
Beispiel 2:	 $\bar{u} = \frac{1}{2} \cdot U_A$ $U = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot U_A$
Beispiel 3:	 $\bar{u} = \frac{U_A}{2} \cdot \frac{t_1}{t_1 + t_2} + U_A \cdot \frac{t_2}{t_1 + t_2}$ $U = \sqrt{\left(\frac{U_A}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{t_1}{t_1 + t_2} + U_A^2 \cdot \frac{t_2}{t_1 + t_2}}$
Beispiel 4:	 $\bar{u} = \frac{U_A + U_B}{2}$ $U = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (U_A^2 + U_B^2 + U_A \cdot U_B)}$
Beispiel 5:	<p>e)</p>  $\bar{u} = \frac{U_A + U_B}{2}$ $U = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (U_A^2 + U_B^2 + U_A \cdot U_B)}$
Berechnung der Beispiel 1-5 mit Hilfe der Theorie aus Abschnitten 6.4.3 und 6.4.7	

Beispiel 6:

Der arithmetische Mittelwert \bar{y} und der Effektivwert Y der unten dargestellten Funktion $y(t)$ ist zu berechnen.



$$\bar{y}_1 = \frac{1}{1s} \int_{t=0}^{1s} \frac{t^2}{s^2} dt = \frac{1}{3*s^3} * t^3 \Big|_{t=0}^1 = \frac{1}{3} \qquad \bar{y}_2 = \frac{1}{2}$$

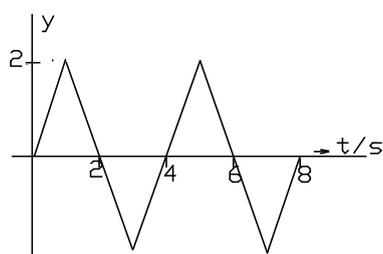
$$\bar{y} = \frac{1}{1+2} * \bar{y}_1 + \frac{2}{1+2} * \bar{y}_2 = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} + \frac{2}{3} * \frac{1}{2} = 0.444$$

$$Y_1 = \sqrt{\frac{1}{1s} \int_{t=0}^{1s} \frac{t^4}{s^4} dt} = \sqrt{\frac{1}{1*s^5} * t^5 \Big|_{t=0}^{1s}} = \sqrt{\frac{1}{5}} \qquad Y_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{1+2} * \left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2 + \frac{2}{1+2} * \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} = 0.537$$

Beispiel 7:

Der arithmetische Mittelwert \bar{y} und der Effektivwert Y der unten dargestellten Funktion $y(t)$ ist zu berechnen.

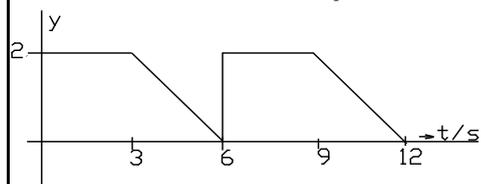


$$\bar{y} = 0$$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15$$

Beispiel 8:

Der arithmetische Mittelwert \bar{y} und der Effektivwert Y der unten dargestellten Funktion $y(t)$ ist zu berechnen.



$$\bar{y}_1 = 2$$

$$\bar{y}_2 = 1$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2} * 2 + \frac{1}{2} * 1 = 1.5$$

$$Y_1 = 2$$

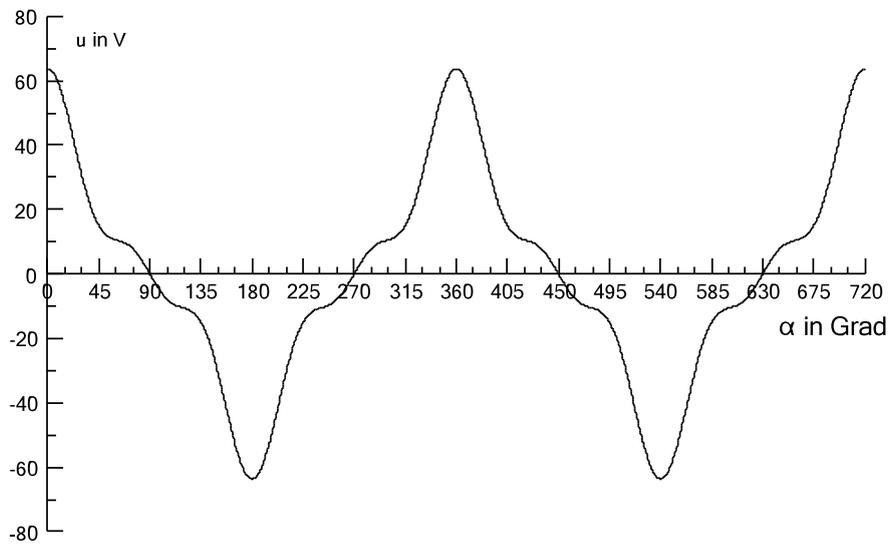
$$Y_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2} * y_1^2 + \frac{1}{2} * y_2^2} = \sqrt{\frac{1}{2} * 2^2 + \frac{1}{2} * \frac{4}{3}} = 1.63$$

Beispiel 9

Von der folgenden Funktion ist zu berechnen: arithmetischer Mittelwert, Effektivwert, Gleichrichtwert, Formfaktor, Grundschwingungsgehalt und Klirrfaktor.

$$u(t) = \sqrt{2} * 30V * \cos(\omega t) + \sqrt{2} * 10V * \cos(3\omega t) + \sqrt{2} * 5V * \cos(5\omega t)$$



$$U_1 = 30 \text{ V}$$

$$U_3 = 10 \text{ V}$$

$$U_5 = 5 \text{ V}$$

$$\bar{u} = 0 \quad (\text{weil reine Wechselgröße})$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = \sqrt{(30V)^2 + (10V)^2 + (5V)^2} = 32.02V$$

Weil das gleichgerichtete Signal unter Beachtung der Achsenspiegelung periodisch in 90° ist, wird der Mittelwert nur über 90° gebildet:

$$|\bar{u}| = \sqrt{2} * \frac{1}{\pi/2} \int_{\alpha=0}^{90^\circ} [30V * \cos(\alpha) + 10V * \cos(3\alpha) + 5V * \cos(5\alpha)] d\alpha$$

$$|\bar{u}| = \frac{\sqrt{2} * 2}{\pi} \left[30V * \sin(\alpha) + \frac{10V}{3} * \sin(3\alpha) + \frac{5V}{5} * \sin(5\alpha) \right]_{\alpha=0}^{90^\circ} = \frac{\sqrt{2} * 2}{\pi} \left[30V - \frac{10V}{3} + \frac{5V}{5} \right] = 24.91V$$

$$F_u = \frac{U}{|\bar{u}|} = \frac{32.02V}{24.91V} = 1.285$$

$$g_u = \frac{U_1}{U} = \frac{30V}{32.02} = 0.9369 \hat{=} 93.7\%$$

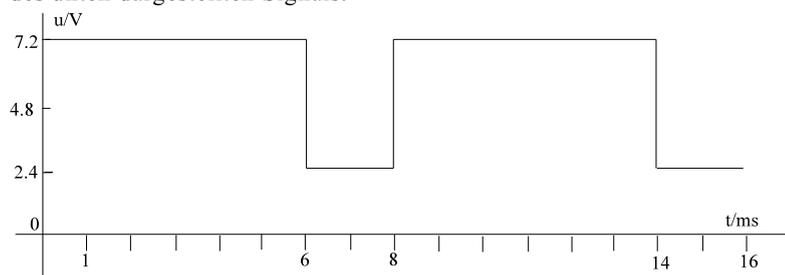
$$k_u = \sqrt{1 - g_u^2} = \sqrt{1 - 0.9369^2} = 0.3496$$

Aufgabe 6.4.A

Bestimmen Sie

- arithmetischen Mittelwert \bar{u}
- Gleichrichtwert $|\bar{u}|$
- und Effektivwert U

des unten dargestellten Signals.

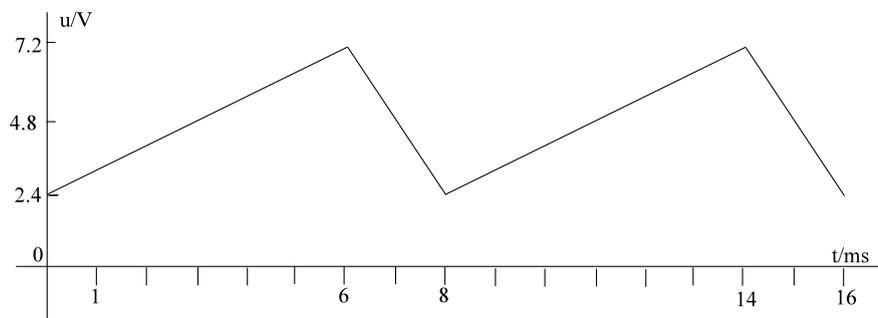


Aufgabe 6.4.B

Bestimmen Sie

- arithmetischen Mittelwert \bar{u}
- Gleichrichtwert $|\bar{u}|$
- und Effektivwert U

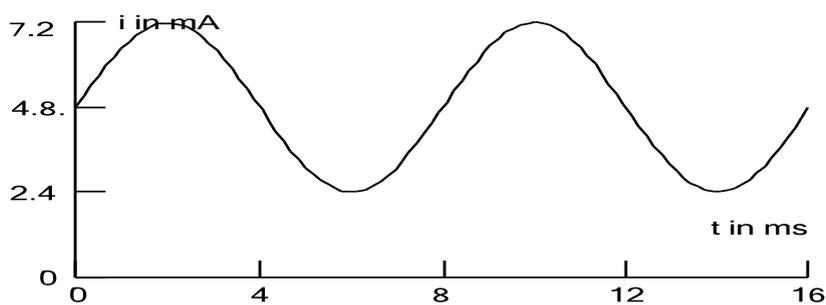
des unten dargestellten Signals.

**Aufgabe 6.4.C**

Bestimmen Sie

- arithmetischen Mittelwert \bar{u}
- Gleichrichtwert $|\bar{u}|$
- und Effektivwert U

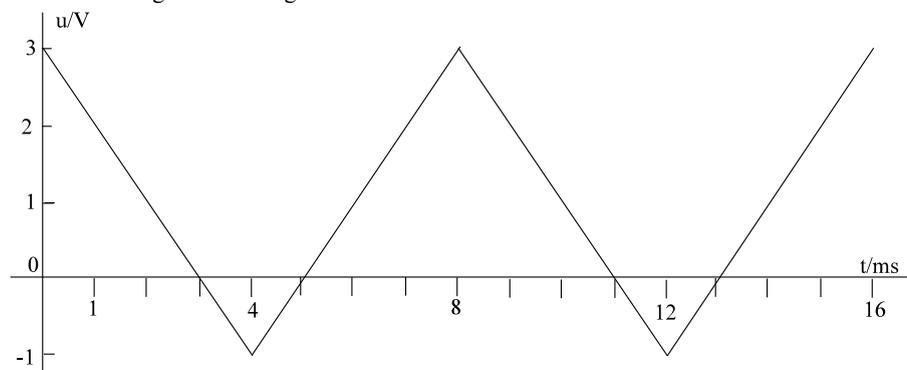
des unten dargestellten harmonischen Signals.

**Aufgabe 6.4.D**

Bestimmen Sie

- arithmetischen Mittelwert \bar{u}
- Gleichrichtwert $|\bar{u}|$
- und Effektivwert U

des unten dargestellten Signals.

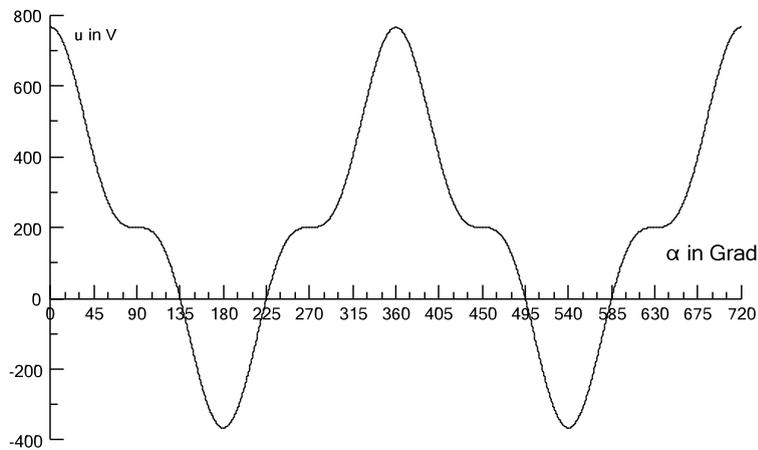


Aufgabe 6.4.E

Von der folgenden Funktion

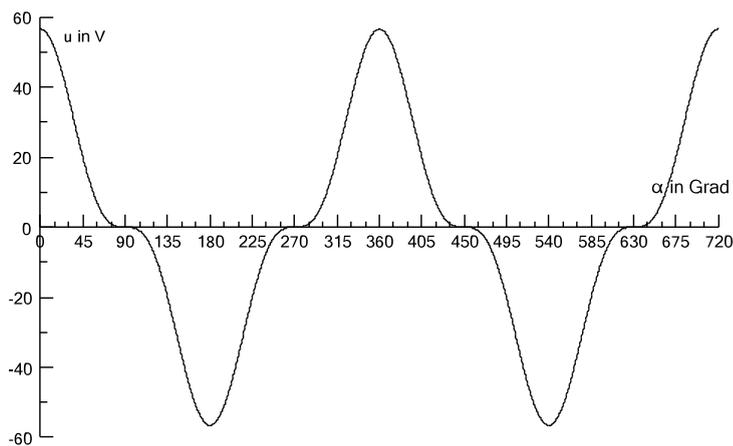
$$u(t) = 200 \text{ V} + \sqrt{2} * 300 \text{ V} * \cos(\omega t) + \sqrt{2} * 100 \text{ V} * \cos(3\omega t)$$

ist arithmetischer Mittelwert \bar{u} , Gleichrichtwert $|\bar{u}|$ und der Effektivwert U zu berechnen.

**Aufgabe 6.4.F**

Von der folgenden Funktion ist zu berechnen: arithmetischer Mittelwert, Effektivwert, Gleichrichtwert, Formfaktor, Grundschwingungsgehalt und Klirrfaktor.

$$u(t) = \sqrt{2} * 30 \text{ V} * \cos(\omega t) + \sqrt{2} * 10 \text{ V} * \cos(3\omega t)$$



Frage 6.4.A Welchen Wert misst ein Messgerät in der Stellung DC?

.....

Frage 6.4.B Welchen Wert misst ein gutes Messgerät in der Stellung AC?

.....

Frage 6.4.C Welchen Wert misst ein billiges Messgerät in der Stellung AC?

.....

6.5. Einfache Schaltungen

In diesem Abschnitt sollen die Grundlagen der komplexen Wechselstromrechnung erarbeitet werden. An folgenden Schaltungen sollen der Zeitverlauf und die komplexen Größen diskutiert werden.

- A] Widerstand R (Kap. 6.5.1)
- B] Induktivität L (Kap. 6.5.2)
- C] Kapazität C (Kap. 6.5.3)
- D] Reihenschaltung R-L (Kap. 6.5.7)
- E] Reihenschaltung R-C (Kap. 6.5.8)
- F] Parallelschaltung R-C (Kap. 6.5.9)

Folgende, schon für Gleichstrom bekannte Gesetze, werden auf Wechselstrom erweitert

- a) Kirchhoffsche Gesetze (Kap. 6.5.5)
- b) Ohmsches Gesetz (Kap. 6.5.10)

6.5.1. Widerstand R

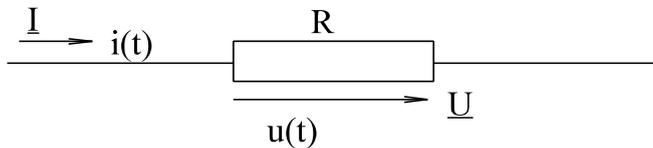


Bild EG651A

6.5.1.1. Zeitbereich

Bei vorgegebenen Strom

$$i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

lässt sich die Spannung über das ohmsche Gesetz berechnen:

$$u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Das ohmsche Gesetz gilt da bei für jeden Zeitpunkt t. Aus dem Vergleich der oberen Formel mit

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

ergibt sich

$$\hat{u} = R \cdot \hat{i}$$

$$\varphi_u = \varphi_i$$

$$\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i = 0$$

Fazit: An einem ohmschen Widerstand sind Strom und Spannung in Phase ($\varphi_u = \varphi_i$) und die Amplituden sind über das ohmsche Gesetz mit R verknüpft.

6.5.1.2. Komplexe Behandlung

Die Größen $u(t)$ und $i(t)$ werden in rotierende Scheitelwertzeiger, ruhende Scheitelwertzeiger und Effektivwertzeiger transformiert:

$$i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \underline{\hat{i}}(t) = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \hat{i} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_i}$$

$$\rightarrow \underline{\hat{i}} = \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}$$

$$\rightarrow \underline{I} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_i} = I \cdot e^{j\varphi_i}$$

$$u(t) = R \cdot \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \underline{\hat{u}}(t) = R \cdot \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = R \cdot \hat{i} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_i}$$

$$\rightarrow \underline{\hat{u}} = R \cdot \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}$$

$$\rightarrow \underline{U} = \frac{R \cdot \hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_i} = U \cdot e^{j\varphi_i}$$

Das ohmsche Gesetz für Gleichstrom lautet:

$$R = \frac{U}{I}$$

Für Wechselstrom wird definiert:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{u(t)}{i(t)}$$

Für verschiedene Elemente (R, L, C) und Schaltungen soll das \underline{Z} später unter sucht werden. \underline{Z} wird der komplexe Widerstand genannt. Für den Fall des ohmschen Widerstandes ergibt sich

$$\underline{Z} = \frac{\frac{R \cdot \hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_i}}{\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{R \cdot \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}}{\hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{R \cdot \hat{i} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_i}}{\hat{i} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_i}} = R$$

$\underline{Z} = R \cdot e^{j0^\circ}$	für ohmschen Widerstand
--	-------------------------

Allgemein (nicht bei R) ergibt sich mit

$$\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} \quad \text{und} \quad \underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}$$

der komplexe Widerstand

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi_z}$$

mit dem Betrag

$$Z = \frac{U}{I}$$

und der Phase

$$\varphi_z = \varphi_u - \varphi_i$$

Der Winkel von \underline{Z} gibt die Phasenverschiebung zwischen $u(t)$ und $i(t)$ an, dazu später mehr.

6.5.1.3. Leistung

Die zeitabhängige Leistung ergibt sich aus der Multiplikation der Zeitgrößen $u(t)$ und $i(t)$:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$$p(t) = [R \cdot \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)] \cdot [\hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)]$$

$$p(t) = R \cdot \hat{i}^2 \cdot [\cos(\omega t + \varphi_i)]^2$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\alpha)]$$

$$p(t) = R \cdot \frac{\hat{i}^2}{2} \cdot [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)]$$

Die Leistung P ergibt sich als Mittelwert über eine Periode der zeitabhängigen Leistung:

$$P = \overline{p(t)} = \frac{1}{T} \int_{(T)} p(t) dt$$

Durch genaues Hinsehen bei $p(t)$, stellt man fest, dass der Term mit \cos keinen Anteil am Mittelwert liefert. Somit ergibt sich:

$$P = R \cdot \frac{\hat{i}^2}{2} = R \cdot \left(\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \right)^2 = R \cdot I^2$$

Obere Ableitung war der Grund für die Einführung des Effektivwertes.

6.5.1.4. Grafische Darstellung der Größen

Für die gegebene Größe

$$U = 100 \text{ V}$$

$$\varphi_u = 0^\circ$$

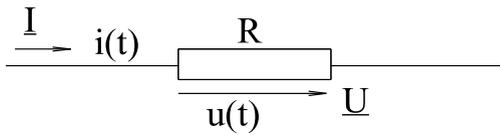
und

$$R = 50 \Omega$$

sind die zeitabhängigen Größen $u(t)$, $i(t)$ und $p(t)$ in das Arbeitsblatt EGII-1 eingetragen, außerdem die komplexen Effektivwertzeiger von \underline{U} , \underline{I} , \underline{Z} und \underline{S} . Der Zeiger \underline{S} wird später in Kap. 6.5.11 erläutert.

Arbeitsblatt EGII-1

Elektrische Wechselgrößen an R



gegeben: $U = 100\text{ V}$
 $\varphi_u = 0^\circ$
 $R = 50\ \Omega$
 $f = 50\text{ Hz}$

Bild EG651A

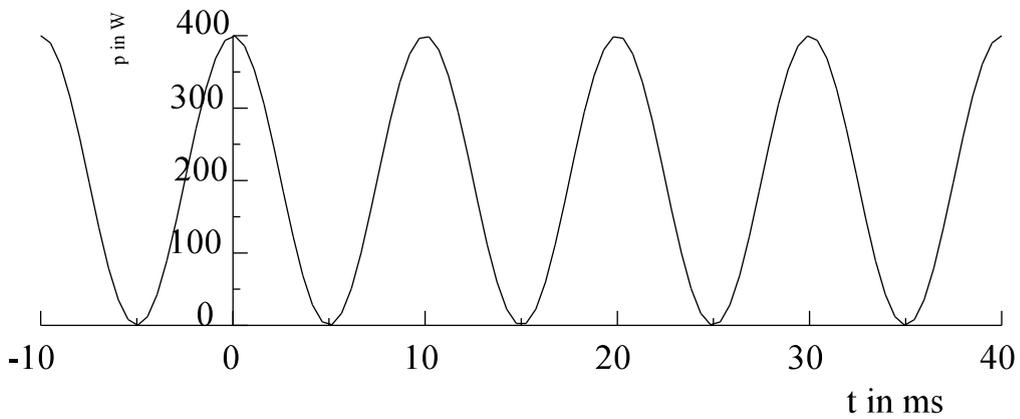
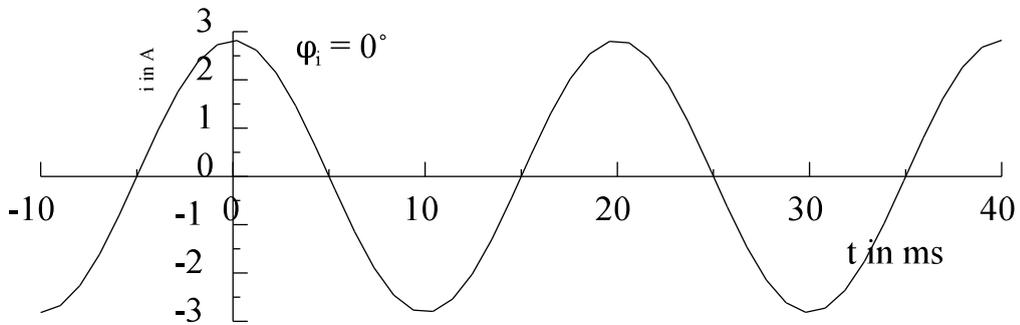
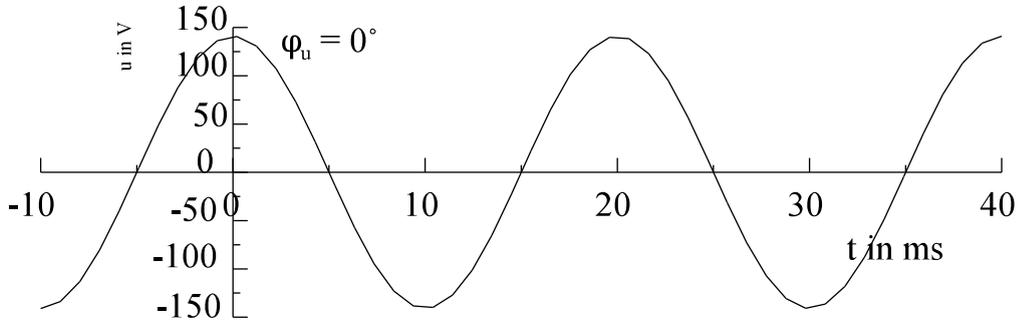
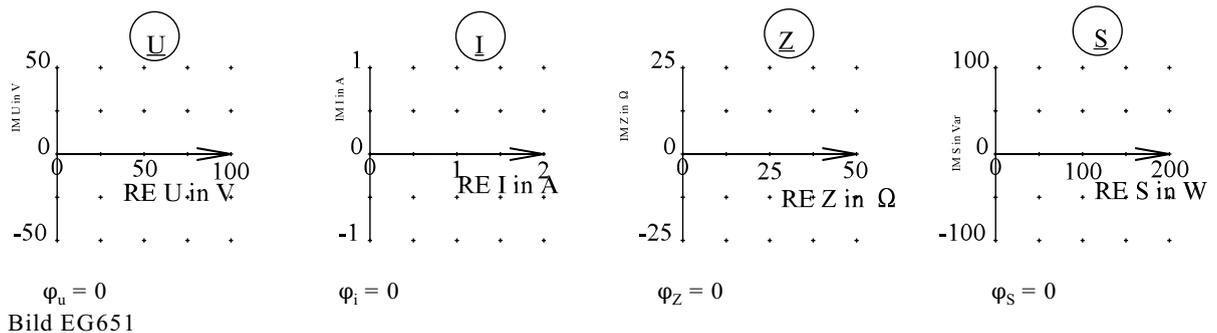


Bild EG6514A



6.5.2. Induktivität L

Eine ideale Induktivität (Drossel) wird durch den Induktionskoeffizienten L beschrieben.

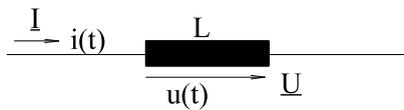


Bild EG652A

6.5.2.1. Zeitbereich

Im Kap. 9 (Magnetische Feld, 3. Semester) wird der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an der Induktivität erarbeitet. Hier soll der Zusammenhang nur angegeben werden:

$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Mit vorgegebenen Strom

$$i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

ergibt sich damit

$$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = -\omega \cdot L \cdot \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = \omega \cdot L \cdot \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i + 90^\circ)$$

Der Vergleich mit

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

lässt erkennen:

$$\hat{u} = \omega \cdot L \cdot \hat{i} = X \cdot \hat{i}$$

und

$$\varphi_u = \varphi_i + 90^\circ$$

mit der Definition:

$$X = \omega \cdot L \quad \text{- Reaktanz}$$

Der Phasenverschiebungswinkel φ_{ui}

$$\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$$

ist positiv und beträgt 90° (eine Vierteldrehung).

Fazit: An der Induktivität sind Strom und Spannung um 90° phasenverschoben. Die Beträge müssen mit dem Faktor $X = \omega \cdot L$ multipliziert werden. Die Richtung der Verschiebung wird ausführlich in Kap. 6.5.4 diskutiert.

6.5.2.2. Komplexe Behandlung

Die Größen $u(t)$ und $i(t)$ werden in rotierende Scheitelwertzeiger, ruhende Scheitelwertzeiger und Effektivwertzeiger transformiert:

$$i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) \quad - \quad \underline{\underline{i}}(t) = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \hat{i} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_i}$$

$$- \quad \underline{\underline{\hat{i}}} = \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}$$

$$- \quad \underline{I} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_i}$$

$$u(t) = X \cdot \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) \quad - \quad \underline{\underline{u}}(t) = X \cdot \hat{i} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j90^\circ}$$

$$- \quad \underline{\underline{\hat{u}}} = X \cdot \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j90^\circ}$$

$$- \quad \underline{U} = \frac{X \cdot \hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j90^\circ}$$

Hier wird auch der komplexe Widerstand \underline{Z} gebildet:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{u(t)}{i(t)}$$

$$\underline{Z} = \frac{\frac{X \cdot \hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j90^\circ}}{\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{X \cdot \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j90^\circ}}{\hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{X \cdot \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j90^\circ}}{\hat{i} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_i}} = X \cdot e^{j90^\circ}$$

$\underline{Z} = X \cdot e^{j90^\circ} = jX$	für Induktivität L
--	--------------------

Der komplexe Widerstand hat hier den Betrag $X = \omega L$ und den Winkel φ_z , der auch gleichzeitig $\varphi_z = \varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$ der Phasenverschiebungswinkel ist.

Beispiel:

gegeben: $I = 2 \text{ A}$ $\varphi_i = 0^\circ$ $f = 50 \text{ Hz}$ $L = 0.1592 \text{ H}$

Lösungsweg:

$$X = \omega \cdot L = 2\pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot 0.1592 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 50 \Omega$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 2 \text{ A} \cdot \cos(\omega t + 0^\circ)$$

$$\underline{I} = 2 \text{ A} / 0^\circ$$

$$\underline{Z} = jX = j 50 \Omega = 50 \Omega / 90^\circ$$

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = j 50 \Omega \cdot 2 \text{ A} / 0^\circ = 50 \Omega / 90^\circ \cdot 2 \text{ A} / 0^\circ = 100 \text{ V} / 90^\circ$$

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 90^\circ)$$

Das Ergebnis ist auf Arbeitsblatt EGII-2 dargestellt.

6.5.2.3. Leistung

Die zeitabhängigen Größen $u(t)$ und $i(t)$ werden wieder zur Leistung multipliziert:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$$p(t) = [-X \cdot \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)] \cdot [\hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)]$$

$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$$

$$p(t) = -\frac{1}{2} X \cdot \hat{i}^2 \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_i)$$

Die Leistung P als Mittelwert ergibt in diesem Fall Null

$$P = 0$$

weil positive und negative Anteile sich aufheben, siehe auch Arbeitsblatt EGII-2. Es liegt eine Leistungspendelung vor. Wenn sich der Strom betragsmäßig vergrößert $|di/dt| > 0$ wird Energie vom Netz entnommen und bei Abnahme des Strombetrages gibt die Induktivität die Energie wieder ab.

Energieversorgungsunternehmen (EVU) sind von solchen Leistungspendelungen nicht so begeistert und lassen sich diese bei Großabnehmern auch bezahlen. Es muss also ein Maß dafür gefunden werden. Dieses ist die Blindleistung Q . Für 90° Phasenverschiebung ($\varphi_{ui} = 90^\circ$) wird definiert:

$$Q = U \cdot I = X \cdot I^2 = \frac{U^2}{X} = X \cdot \left(\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \right)^2$$

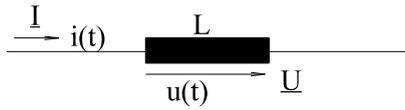
Q ist somit der Faktor vor dem \sin in der oberen Formel für $p(t)$.

6.5.2.4. Grafische Darstellung der Größen

Wie auch am Widerstand, sollen die zeitabhängigen und komplexen Größen für ein Beispiel dargestellt werden, siehe Arbeitsblatt EGII-2.

Arbeitsblatt EGII-2

Elektrische Wechselgrößen an L



gegeben: $I = 2 \text{ A}$
 $\varphi_i = 0^\circ$
 $f = 50 \text{ Hz}$
 $L = 0.1592 \text{ H} \Rightarrow X = 50 \Omega$

Bild EG652A

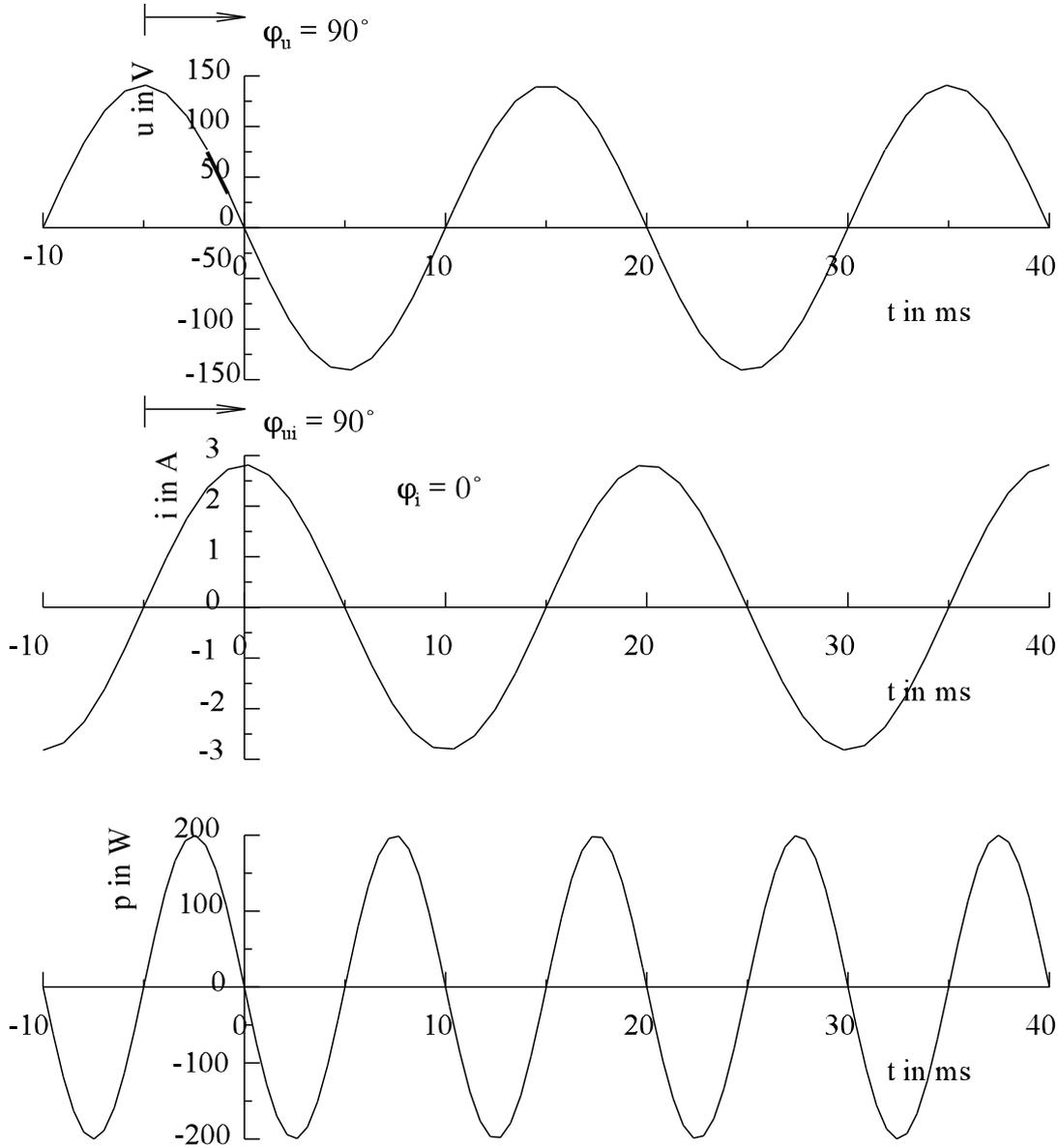


Bild EG6524A

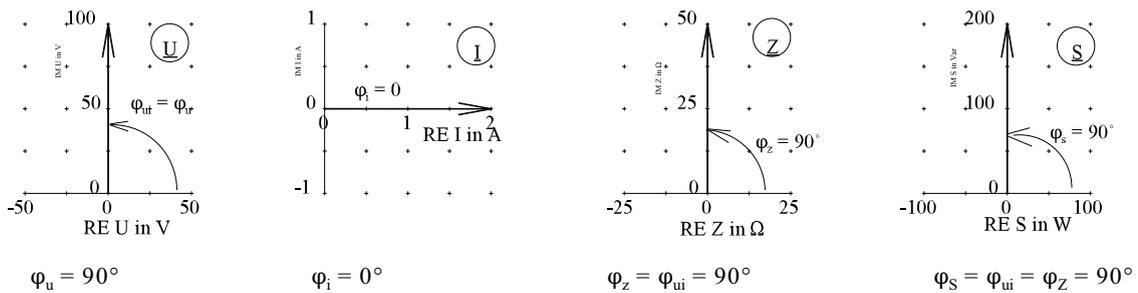


Bild EG6524B

6.5.3. Kapazität C

Eine Kapazität (Kondensator) wird durch den Kapazitätskoeffizienten C beschrieben.

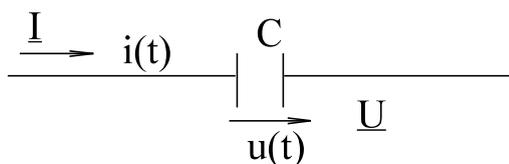


Bild EG653A

6.5.3.1. Zeitbereich

Im Kap. 8 (Elektrostatisches Feld, Ende 2. Semester) wird der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an der Kapazität erarbeitet. Hier soll nur der Zusammenhang angegeben werden:

$$i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Mit vorgegebener Spannung

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

ergibt sich für den Strom

$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt} = -\omega \cdot C \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) = \omega \cdot C \cdot \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u + 90^\circ)$$

Aus dem Vergleich mit

$$i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

erhält man:

$$\hat{i} = \omega \cdot C \cdot \hat{u} = B \cdot \hat{u} \quad \text{und} \quad \varphi_i = \varphi_u + 90^\circ$$

mit der Definition

$$B = \omega C \quad - \text{ Blindleitwert}$$

Der Phasenverschiebungswinkel φ_{ui}

$$\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ$$

ist negativ und beträgt -90° (eine Vierteldrehung).

Fazit: An einer Kapazität sind Strom und Spannung um 90° phasenverschoben. Die Beträge müssen mit dem Faktor $B = \omega C$ multipliziert werden. Die Richtung der Verschiebung ist entgegengesetzt der an der Induktivität. Die Richtung der Verschiebung wird ausführlich in Kap. 6.5.4 diskutiert.

6.5.3.2. Komplexe Behandlung

Die Größen $u(t)$ und $i(t)$ werden in Effektivwertzeiger transformiert:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \quad - \quad \underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_u}$$

$$i(t) = \omega C \cdot \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) \quad - \quad \underline{I} = \omega C \cdot \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j90^\circ}$$

Wiederum wird der komplexe Widerstand gebildet:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_u}}{\omega C \cdot \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j90^\circ}}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{jB} = jX = \frac{1}{\underline{Y}} \quad X = -\frac{1}{\omega C}$$

wobei \underline{Y} der komplexe Leitwert als Kehrwert des komplexen Widerstandes definiert wird:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Blindleitwert B und Blindleitwert X (Reaktanz) wurden schon erläutert.

6.5.3.3. Leistung

Die zeitabhängige Leistung wird aus $u(t)$ und $i(t)$ berechnet:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = [\hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)] \cdot [\omega C \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)]$$

$$p(t) = \omega C \cdot \hat{u}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u)$$

$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$$

$$p(t) = B \left(\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \sin(2\omega t + \varphi_u)$$

Die Leistung p als Mittelwert gibt wiederum (wie bei der idealen Induktivität) Null. Es liegt eine Leistungspendelung vor. Wenn der Kondensator aufgeladen wird ($|du/dt| > 0$), ist eine positive Leistung vorhanden. Beim Entladen wird wieder Energie abgegeben und die momentane Leistung ist negativ.

Es muss auch hier wieder eine Blindleistung definiert werden aus U mal I . Da diese aber anders Vorzeichen hat, wird die Blindleistung für kapazitive Anteile negativ definiert: (90° Phasenverschoben)

$$Q = -U \cdot I = -B \cdot U^2 = -\frac{I^2}{B} = +X \cdot I^2 = -B \left(\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \right)^2$$

6.5.3.4. Beispiel und grafische Darstellung der Größen

Beispiel:

gegeben: $I = 2 \text{ A}$ $\varphi_i = 0^\circ$ $f = 50 \text{ Hz}$
 $C = 63.66 \text{ } \mu\text{F}$ \Rightarrow $B = 0.02 \text{ S}$ $X = -50 \text{ } \Omega$

Lösungsweg:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 2 \text{ A} \cdot \cos(\omega t + 0^\circ)$$

$$\underline{I} = 2 \text{ A} / 0^\circ$$

$$\underline{Y} = j\omega C = j0.02 \text{ S}$$

$$\underline{Z} = -50 \text{ j}\Omega = 50 \text{ } \Omega / -90^\circ$$

$$U = \frac{I}{Y} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = 50 \text{ } \Omega / -90^\circ \cdot 2 \text{ A} / 0^\circ = 100 \text{ V} / -90^\circ$$

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \text{ V} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ)$$

Das Ergebnis ist auf Arbeitsblatt EGII-3 dargestellt. Die Phasenverschiebung wird in Kap. 6.5.4 erläutert.

Arbeitsblatt EGII-3

Elektrische Wechselgrößen an C

gegeben: $\underline{I} = 2 \text{ A}/0^\circ$ $\varphi_i = 0^\circ$ $f = 50 \text{ Hz}$
 $C = 63.66 \text{ } \mu\text{F}$ $\Rightarrow X = -50 \text{ } \Omega$

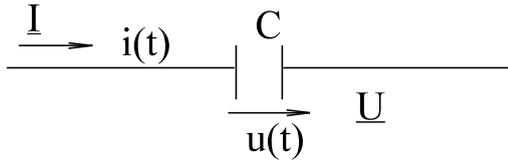


Bild EG653A

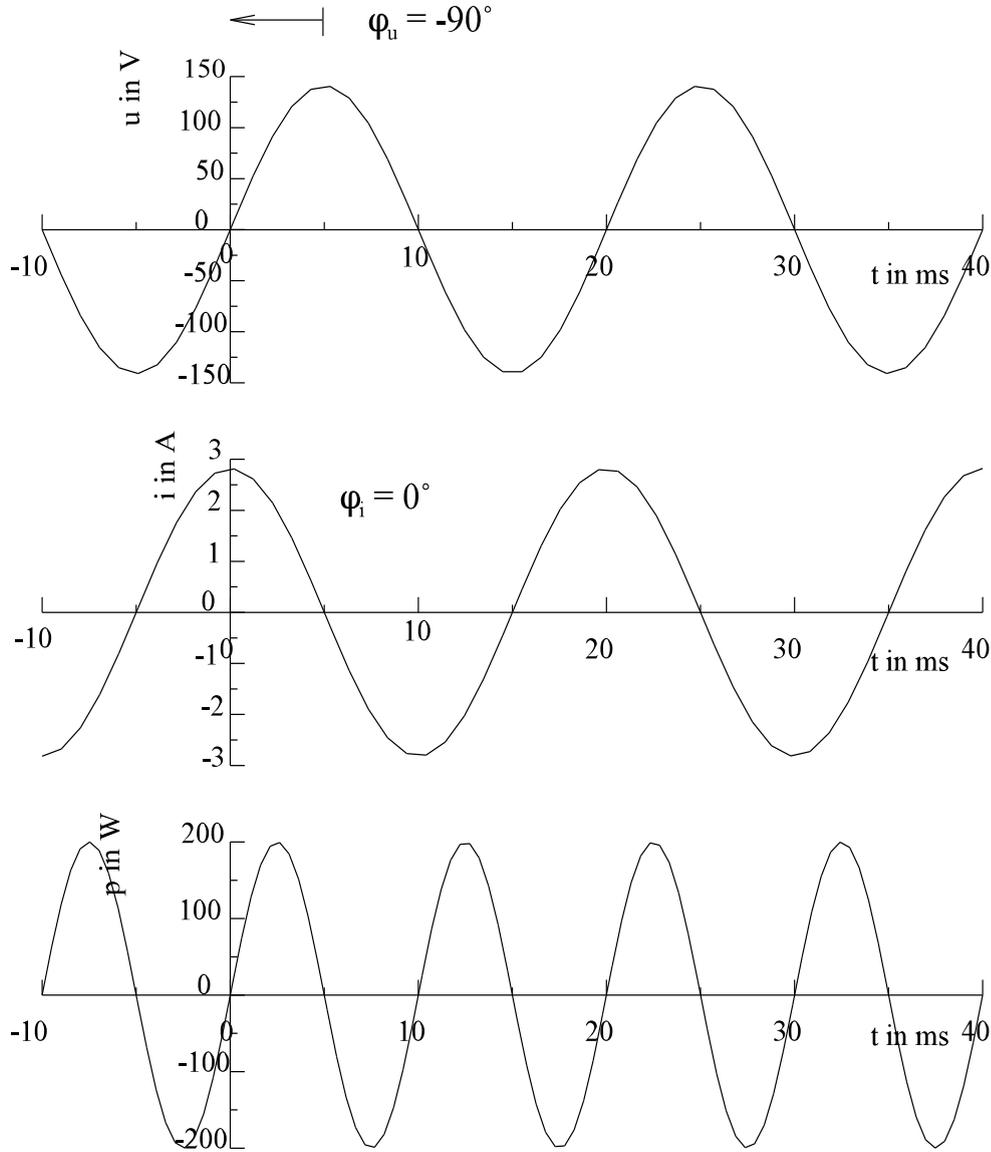
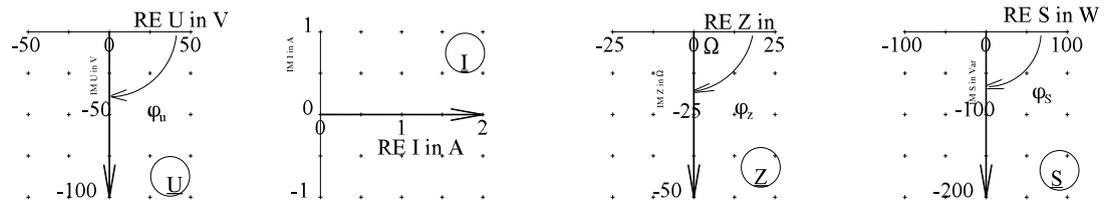


Bild EG6534A



$\varphi_u = -90^\circ$

$\varphi_i = 0^\circ$

$\varphi_z = \varphi_{ui} = -90^\circ$

$\varphi_s = \varphi_{ui} = \varphi_z = -90^\circ$

Bild EG6534B

6.5.4. Phasenverschiebung

Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung soll anhand der Arbeitsblätter EGII-1, 2 und 3 diskutiert werden.

Widerstand R

Arbeitsblatt EGII- 1

Am Widerstand ist keine Phasenverschiebung zwischen $u(t)$ und $i(t)$ vorhanden

$$\varphi = \varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i = 0^\circ = \varphi_Z$$

Auch der komplexe Widerstand \underline{Z} hat den gleichen Phasenwinkel und ist rein reell.

Induktivität L und Kapazität C

Arbeitsblätter EGII- 2 und 3

An beiden Elementen ist die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung vom Betrag her 90° und das Vorzeichen ist unterschiedlich. Hier tritt die Frage auf, was ist voreilend und was ist nacheilend. Da gibt es vier verschiedene Möglichkeiten dieses zu erklären

- A] Physikalische Erklärung
- B] Mathematische Erklärung
- C] Erklärung im Zeitbereich
- D] Erklärung anhand komplexen Zeiger
- E] Eselsbrücke

A] Physikalische Erklärung

Induktivitäten und Kapazitäten sind Energiespeicher. Die momentan gespeicherte Energie lässt sich berechnen mit (Ableitung später in Kap. 8 und 9):

$$W_L = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t) \qquad W_C = \frac{1}{2} C \cdot u^2(t)$$

Beim Kondensator ist die Energie von der Spannung abhängig und bei der Induktivität vom Strom. Ein physikalisches Grundprinzip ist, dass sich makroskopische energiebehaftete Größen nur stetig ändern können. Bei einer sprunghaftigen Veränderung der Energie tritt eine unendliche Leistung $p = dW/dt$ auf. Ein anschauliches Beispiel aus der Mechanik ist die träge Masse. Die energiebehafteten Größen Geschwindigkeit und Weg können sich nicht sprunghaft verändern. Die Anregung ist in diesem Fall eine Kraft. Die Wirkung Geschwindigkeit ändert sich langsamer als die Anregung Beschleunigung. Die Wirkung tritt somit später auf und ist somit nacheilend.

Fazit: Die energiebehaftete Größe ist nacheilend.

Induktivität

Energie ist von i abhängig
 i eilt u um 90° nach
 u eilt i um 90° voraus

Kapazität

Energie ist von u abhängig
 u eilt i um 90° nach
 i eilt u um 90° voraus

B] Mathematische Erklärung

Die mathematische Erklärung erfolgt mit Hilfe des Phasenverschiebungswinkel:

$$\varphi_{ui} = \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z$$

Induktivität L

$$\varphi_{ui} = 90^\circ$$

$$\varphi_{ui} > 0$$

=>

u eilt i voraus i eilt u nach

Kapazität C

$$\varphi_{ui} = -90^\circ$$

$$\varphi_{ui} < 0$$

=>

u eilt i nach i eilt u voraus

Widerstand R

$$\varphi_{ui} = 0$$

u und i in Phase

C] Erklärung im Zeitbereich

Hier muss man feststellen, wann ein Ereignis auftritt. Was kann man sich bei einer Schwingung als Ereignis vorstellen? Da gibt es mehrere Möglichkeiten: z.B. Nulldurchgang oder Maximum. Da aber die Angabe des Phasenwinkels einer Schwingung vom Maximum der Schwingung zu $t = 0$ erfolgt, wird hier das Maximum betrachtet.

Induktivität

Bewegt man sich auf Arbeitsblatt EGII-2 in Richtung zunehmender Zeit (positive Zeitrichtung), kommt man bei $\varphi = -90^\circ$ auf das Maximum der Spannung und bei $\varphi = 0^\circ$ auf das Maximum des Stromes. Das Maximum des Stromes tritt zeitlich später auf als das der Spannung, daher ist der Strom nacheilend.

Kapazität

Bewegt man sich auf Arbeitsblatt EGII-3 in Richtung zunehmender Zeit, kommt man bei $\varphi = 0^\circ$ auf das Maximum des Stromes und bei $\varphi = 90^\circ$ auf das Maximum der Spannung. Damit eilt die Spannung dem Strom nach.

D] Erklärung anhand der komplexen Zeiger

Der Effektivwertzeiger wurde über den rotierenden Scheitelwertzeiger abgeleitet. Der rotierenden Scheitelwertzeiger bewegt sich in positiver mathematischer Winkelrichtung, siehe Bild EG654A.

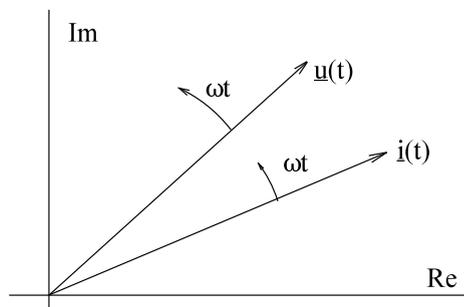


Bild EG654A

Einen bestimmten Phasenwinkel erreicht nach Bild EG654A die Spannung $\underline{u}(t)$ immer zu erst und danach erst $\underline{i}(t)$. D.h. der Strom eilt der Spannung nach.

Fazit: Der Zeiger mit dem größeren Phasenwinkel eilt voraus und der Zeiger mit dem kleineren Phasenwinkel eilt nach. Bewegt man sich in positiver Winkelrichtung, trifft man zuerst auf den nacheilenden Zeiger und danach auf den voreilenden.

Anwendung auf Arbeitsblätter EGII- 2 und 3

Induktivität

$$\varphi_u = 90^\circ$$

$$\varphi_i = 0^\circ$$

φ_u größer

u voreilend

i nacheilend

Kapazität

$$\varphi_u = -90^\circ$$

$$\varphi_i = 0^\circ$$

φ_i größer

i voreilend

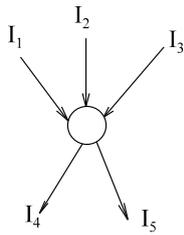
u nacheilend

E] Eselsbrücke

Bei Induktivitäten die Ströme sich verspäten

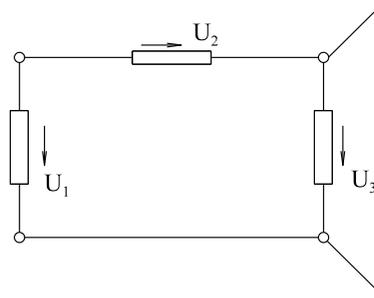
6.5.5. Kirchhoffsche Gesetze bei Wechselstrom

Aus dem ersten Semester sind die Kirchhoffschen Gesetze für Gleichstrom bekannt:



$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$$

$$\sum_{\nu=1}^n I_{\nu} = 0$$

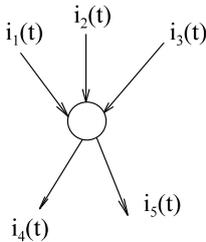


$$U_1 = U_2 + U_3$$

$$\sum_{\nu=1}^n U_{\nu} = 0$$

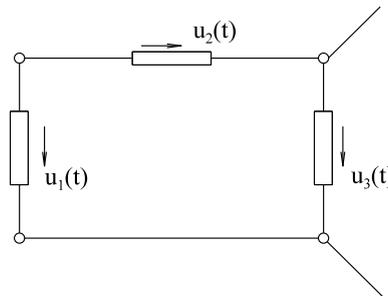
Bild EG655A

obere Gesetze gelten auch für Wechselstrom, nur anstatt der Gleichstromgrößen müssen zeitabhängige Größen eingesetzt werden.



$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = i_4(t) + i_5(t)$$

$$\sum_{\nu=1}^n i_{\nu}(t) = 0$$

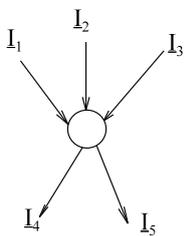


$$u_1(t) = u_2(t) + u_3(t)$$

$$\sum_{\nu=1}^n u_{\nu}(t) = 0$$

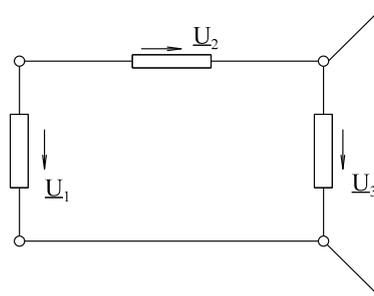
Bild EG655B

Da aber sich Additionen harmonischer Größen mit Hilfe der komplexen Rechnung ausführen lassen, gelten die Kirchhoffschen Gesetze auch für komplexe Größen:



$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$$

$$\sum_{\nu=1}^n \underline{I}_{\nu} = 0$$



$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{U}_3$$

$$\sum_{\nu=1}^n \underline{U}_{\nu} = 0$$

Bild EG655C

6.5.6. Komplexe Behandlung von Spannungsquellen

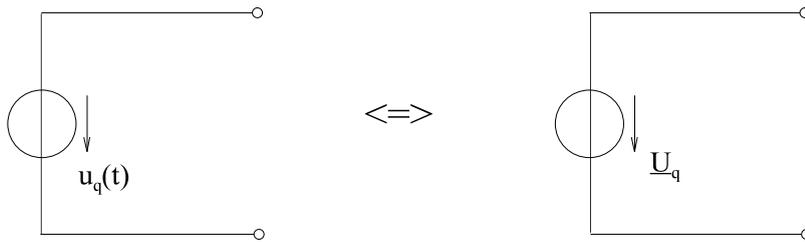


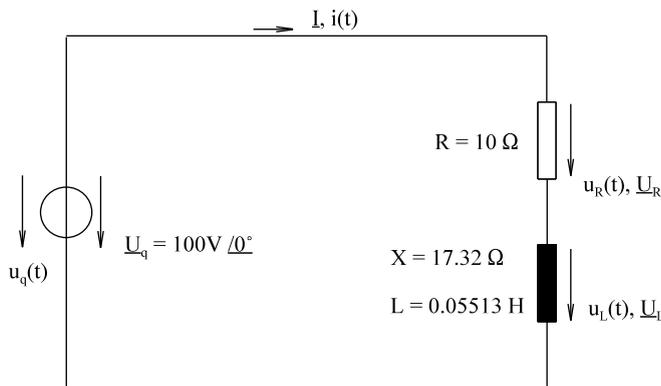
Bild EG656A

Die ideale Quelle nach Bild EG656A wird zur Vorbereitung auf komplexe Rechnung umgerechnet wie eine Spannung allgemein:

$$u_q(t) = \hat{u}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{U}_q = \frac{\hat{u}_q}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_q} = U_q \cdot e^{j\varphi_q}$$

6.5.7. Reihenschaltung R-L

Für die Anordnung nach Bild EG657A sollen alle folgenden elektrischen Größen berechnet und dargestellt werden.



- gegeben:** $u_q(t) = 141 \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$
 $f = 50 \text{ Hz}$
 $R = 10 \text{ Ohm}$
 $L = 0.05513 \text{ H}$

Bild EG657A

$$X = \omega L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot 0.05513 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 17.32 \text{ Ohm}$$

$$\underline{U}_q = \frac{141 \text{ V}}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 100 \text{ V} \angle 0^\circ$$

Aus dem komplexen Maschenumlauf ergibt sich:

$$\underline{U}_q = \underline{U}_R + \underline{U}_L$$

Mit $\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$ und

$$\underline{U}_L = j\omega L \underline{I} = jX \underline{I}$$

lässt sich angeben $\underline{U}_q = R \cdot \underline{I} + jX \underline{I} = (R + jX) \cdot \underline{I}$

Die Anteile R und L werden zusammengefasst zum komplexen Widerstand

$$\underline{Z} = R + jX = (10 + j 17.32) \text{ Ohm} = 20 \text{ Ohm} \angle 60^\circ$$

Damit erhält man

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{R + jX} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}}$$

das ohmsche Gesetz in komplexer Form. Der Widerstand \underline{Z} ist der Widerstand einer Reihenschaltung von R und

jX . Wie bei Gleichstrom werden die Widerstände behandelt, nur komplex.

Für die Zahlenwerte des oberen Beispiels lässt sich berechnen:

$$\underline{I} = \frac{100 \text{ V}/0^\circ}{20 \Omega/60^\circ} = 5 \text{ A } / -60^\circ$$

Die Spannungsabfälle am R und L lassen sich nach dem ohmschen Gesetz berechnen:

$$\underline{U}_R = \underline{I} * R = 5 \text{ A } / -60^\circ * 10 \Omega / 0^\circ = 50 \text{ V } / -60^\circ$$

$$\underline{U}_L = \underline{I} * jX = 5 \text{ A } / -60^\circ * 17.32 \Omega / 90^\circ = 86.6 \text{ V } / 30^\circ$$

Alle Größen in den Zeitbereich zurücktransformiert ergibt:

$$u_q(t) = 141 \text{ V} * \cos(\omega t + 0^\circ)$$

$$u_R(t) = 70.7 \text{ V} * \cos(\omega t - 60^\circ)$$

$$u_L(t) = 122 \text{ V} * \cos(\omega t + 30^\circ)$$

$$i(t) = 7.07 \text{ A} * \cos(\omega t - 60^\circ)$$

Auf Arbeitsblatt EGII- 4 sind die zeitabhängigen und komplexen Größen für das obere Beispiel dargestellt.

Betrachtung der Phasenverschiebung

Bei einer Quelle mit induktiver Belastung eilt der Strom i der Spannung U_q nach. Die Spannung an R und der Strom sind in Phase, siehe Kap. 6.5.1. Die Spannung an der Induktivität U_L eilt dem Strom i um 90° voraus.

Allgemeine Berechnung von Betrag und Phase

$$\underline{U}_q = U_q / \varphi_q \quad \text{oben:} \quad \varphi_q = 0^\circ$$

$$\underline{I} = \frac{U_q}{R + jX} = \frac{U_q \left| \varphi_q \right.}{\sqrt{R^2 + X^2} \left| \arctan\left(\frac{X}{R}\right) \right.}$$

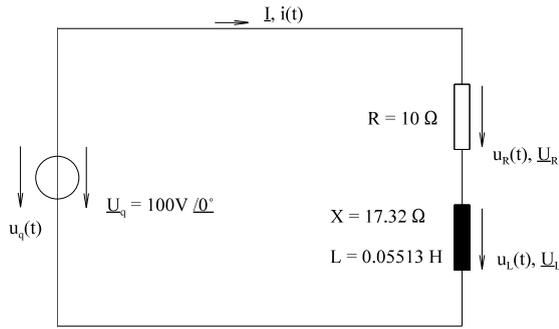
$$\underline{I} = \frac{U_q}{\sqrt{R^2 + X^2}} \left| \varphi_q - \arctan\left(\frac{X}{R}\right) \right. = I * e^{j(\varphi_q - \varphi)}$$

$$I = \frac{U_q}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad \varphi = \varphi_q - \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \varphi_q - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Mit der komplexen Rechnung lassen sich die Formeln für Betrag und Phase sehr schnell ableiten.

Arbeitsblatt EGII-4

Reihenschaltung R-L



Ergebnis: $\underline{I} = 5 \text{ A} \angle -60^\circ$

$\underline{U}_R = 50 \text{ V} \angle -60^\circ$

$\underline{U}_L = 86.6 \text{ V} \angle 30^\circ$

Bild EG657A

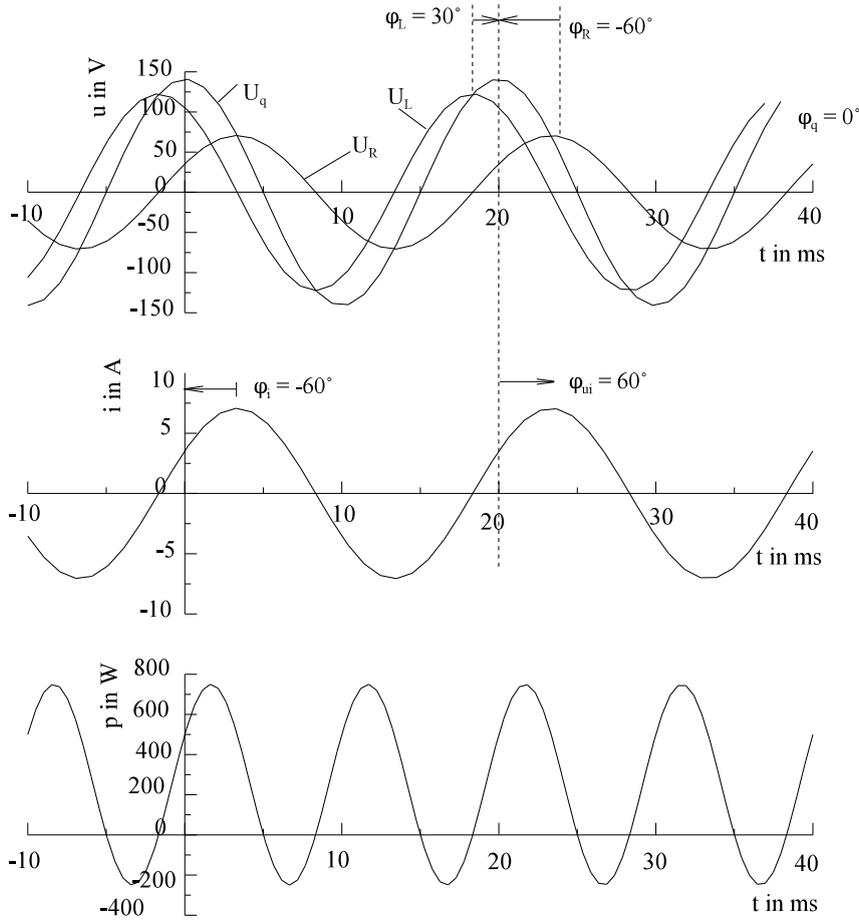
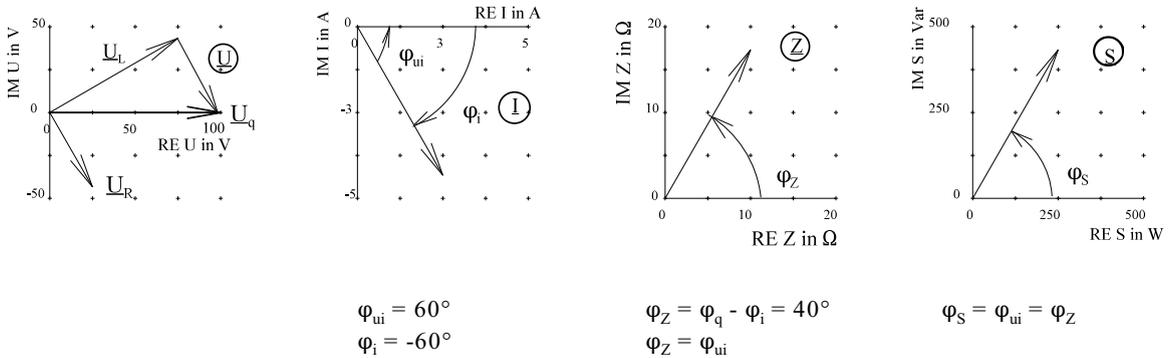


Bild EG567B



$\varphi_{ui} = 60^\circ$
 $\varphi_i = -60^\circ$

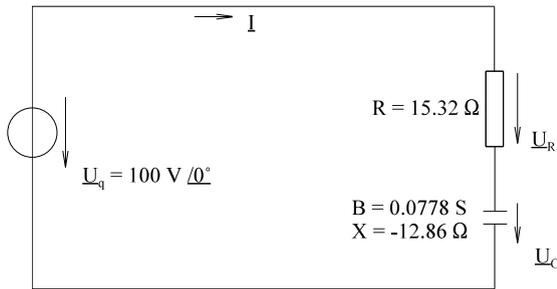
$\varphi_Z = \varphi_q - \varphi_i = 40^\circ$
 $\varphi_Z = \varphi_{ui}$

$\varphi_S = \varphi_{ui} = \varphi_Z$

Bild EG657C

6.5.8. Reihenschaltung R-C

Für die Anordnung nach Bild EG658A sollen alle fehlenden elektrischen Größen berechnet und dargestellt werden



gegeben: $U_q(t) = 141 \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$C = 247.5 \text{ } \mu\text{F}$$

$$R = 15.32 \text{ } \Omega$$

Bild EG658A

$$X = \frac{-1}{\omega C} = \frac{-1}{2\pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot 247.5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}} = -12.86 \text{ } \Omega$$

$$\underline{U}_q = 100 \text{ V} / 0^\circ$$

$$\underline{U}_q = \underline{U}_R + \underline{U}_C$$

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$$

$$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I} = \frac{1}{jB} \underline{I} = jX \cdot \underline{I}$$

$$\underline{U}_q = R \cdot \underline{I} + jX \underline{I} = (R + jX) \cdot \underline{I}$$

Auch hier gilt wieder

$$\underline{Z} = R + jX \quad \text{mit}$$

$$jX = \frac{1}{j\omega C}$$

$$X = -\frac{1}{\omega C}$$

$$\underline{Z} = 15.32 \text{ } \Omega - j 12.86 \text{ } \Omega = 20 \text{ } \Omega / -40^\circ$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}} = \frac{100 \text{ V} / 0^\circ}{20 \text{ } \Omega / -40^\circ} = 5 \text{ A} / 40^\circ$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R = 5 \text{ A} / 40^\circ \cdot 15.32 \text{ } \Omega / 0^\circ = 76.6 \text{ V} / 40^\circ$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot jX = 5 \text{ A} / 40^\circ \cdot 12.86 \text{ } \Omega / -90^\circ = 64.3 \text{ V} / -50^\circ$$

Alle Größen in den Zeitbereich zurück transformiert ergibt:

$$u_q(t) = 141 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 0^\circ)$$

$$u_R(t) = 108 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 40^\circ)$$

$$u_C(t) = 91 \text{ V} \cdot \cos(\omega t - 50^\circ)$$

$$i(t) = 7.07 \text{ A} \cdot \cos(\omega t + 40^\circ)$$

Auf Arbeitsblatt EGII-5 sind die zeitabhängigen und komplexen Größen für das obere Beispiel dargestellt.

Betrachtung der Phasenverschiebung

Bei einer Quelle mit kapazitiver Belastung eilt die Spannung U_q dem Strom i nach. Die Spannung an R und der Strom an R sind in Phase, siehe Kap. 6.5.1. Die Spannung an C eilt dem Strom nach, siehe Kap. 6.5.3.

Allgemeine Betrachtung von Betrag und Phase

Mit

$$\underline{U}_q = U_q \angle \varphi_q$$

erhält man aus Kap. 6.5.7 für Betrag und Phase:

$$I = \frac{U_q}{R + jX} = \frac{U_q \angle \varphi_q}{\sqrt{R^2 + X^2} \angle \arctan(X/R)}$$

$$I = \frac{U_q}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

$$X = -\frac{1}{B} = -\frac{1}{\omega C}$$

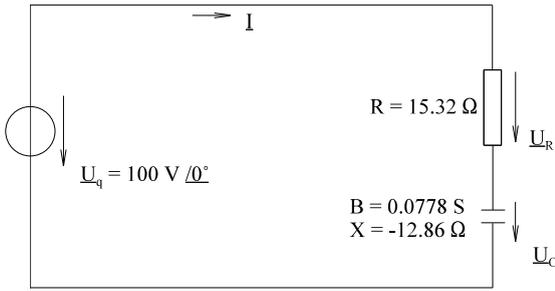
$$I = \frac{U_q}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\varphi_i = -\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

$$\varphi = \varphi_q - \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \varphi_q + \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Arbeitsblatt EGII-5

Reihenschaltung R-C



Ergebnis:

$\underline{I} = 5 \text{ A } / 40^\circ$

$\underline{U}_R = 76.6 \text{ V } / 40^\circ$

$\underline{U}_C = 64.3 \text{ V } / -50^\circ$

Bild EG658A

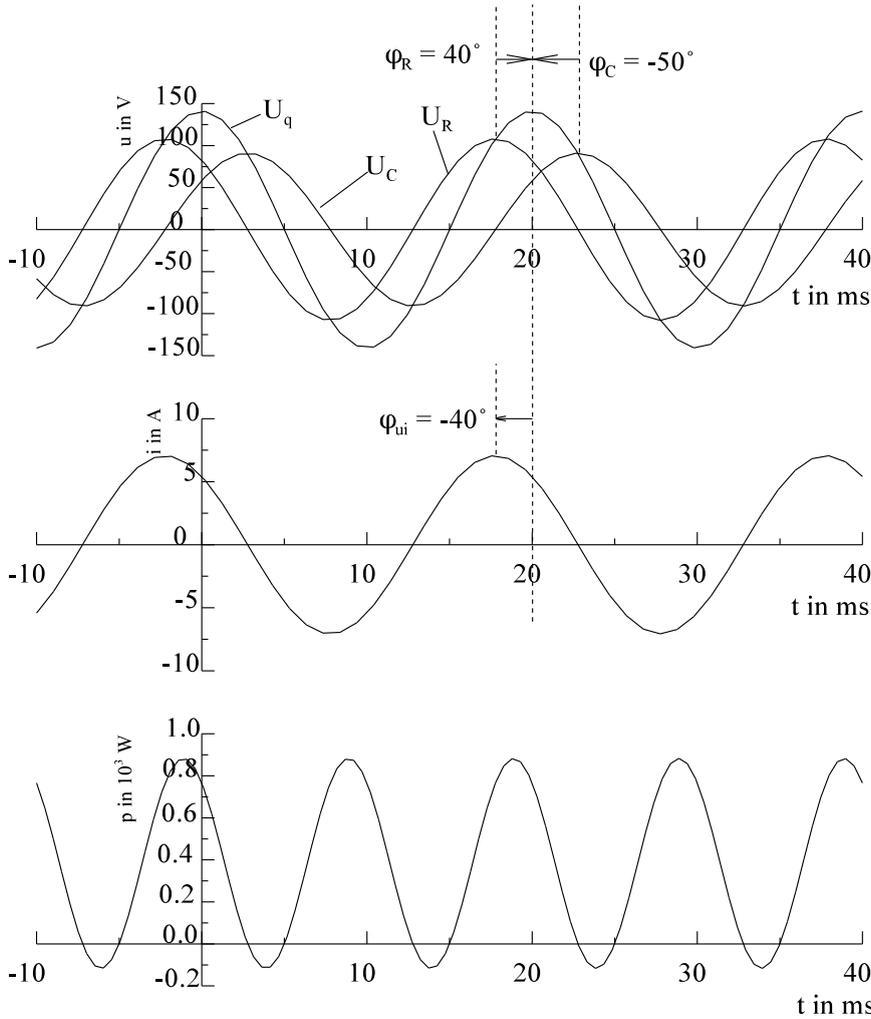


Bild EG658B

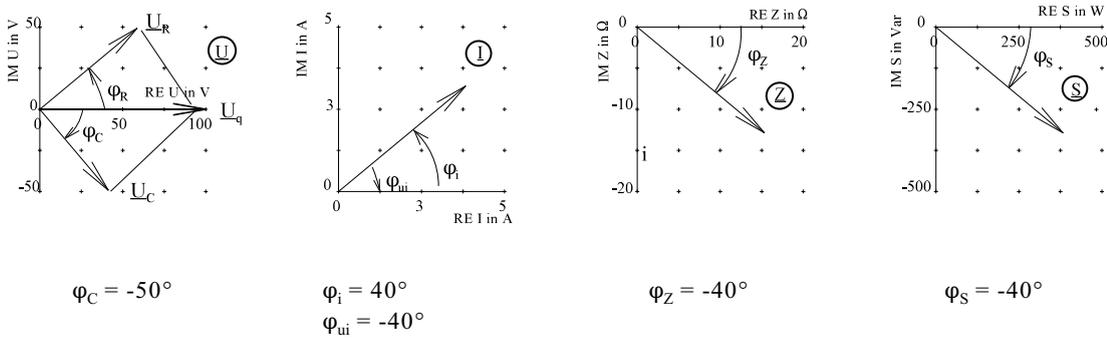
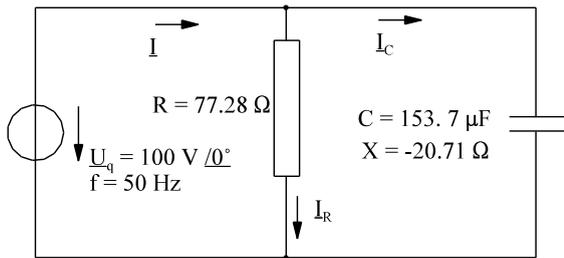


Bild EG658C

6.5.9. Parallelschaltung R-C



gegeben: $U_q = 100 \text{ V}$
 $C = 153.7 \text{ } \mu\text{F}$
 $R = 77.28 \text{ } \Omega$

Bild EG659A

$$\underline{U}_q = 100 \text{ V } / 0^\circ$$

$$\underline{G} = (77.28 \text{ } \Omega)^{-1} = 12.94 \text{ mS}$$

$$\underline{B} = -\frac{1}{X} = 48.29 \text{ mS} = \omega * C = 2\pi * 50 \text{ s}^{-1} * 153.7 * 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_q}{R} + \frac{\underline{U}_q}{\frac{1}{j\omega C}} = U_q * G + j\omega C * U_q$$

$$\underline{I} = \underline{Y} * \underline{U}_q \quad \underline{Y} - \text{komplexer Leitwert} \quad \underline{Y} = G + jB$$

$$\underline{Y} = G + jB = 12.94 \text{ mS} + j48.29 \text{ mS} = 50 \text{ mS } / 75^\circ$$

$$\underline{Z} = 1/\underline{Y} = 20 \text{ } \Omega / -75^\circ = 5.18 \text{ } \Omega - j19.32 \text{ } \Omega$$

$$\underline{I} = \underline{U}_q * \underline{Y} = 100 \text{ V } / 0^\circ * 50 \text{ mS } / 75^\circ = 5 \text{ A } / 75^\circ$$

$$\underline{I} = (1.294 \text{ A} + j4.829 \text{ A})$$

auch: $\underline{I} = \underline{U}_q / \underline{Z}$

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_q}{R} = \frac{100 \text{ V } / 0^\circ}{77.28 \text{ } \Omega / 0^\circ} = 1.294 \text{ A } / 0^\circ$$

$$\underline{I}_C = \underline{U}_q * jB = 100 \text{ V } / 0^\circ * 48.29 \text{ mS } / 90^\circ = 4.829 \text{ A } / 90^\circ$$

Damit erfüllt: $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C$

Zurücktransformiert in den Zeitbereich ergibt sich:

$$u_q(t) = 141 \text{ V} * \cos(\omega t + 0^\circ)$$

$$i_R(t) = 1.82 \text{ A} * \cos(\omega t + 0^\circ)$$

$$i_C(t) = 6.83 \text{ A} * \cos(\omega t + 90^\circ)$$

$$i(t) = 7.07 \text{ A} * \cos(\omega t + 75^\circ)$$

Anmerkungen zu Arbeitsblatt EGII-6

- alle Spannungen sind gleich
- Ströme können einzeln betrachtet werden
 - * Strom von R ist in Phase mit U
 - * Strom von C eilt der Spannung um 90° voraus
 - * Gesamtstrom ergibt sich aus der Addition von $i_R + i_C$
- Da eine kapazitive Last vorhanden ist, eilt die Spannung dem Gesamtstrom nach

Allgemeine Berechnung von Betrag und Phase

$$\underline{Y} = G + jB = \sqrt{G^2 + B^2} * \underline{\arctan(B/G)}$$

$$\underline{U}_q = U_q / \varphi_q$$

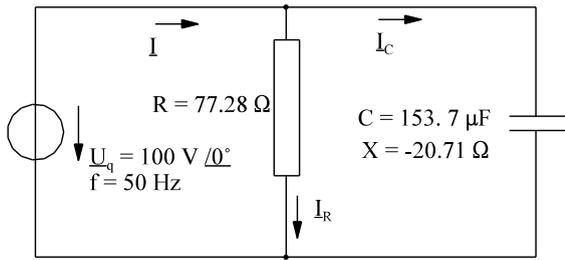
$$\underline{I} = \underline{U}_q * \underline{Y} = U_q \varphi_q * \sqrt{G^2 + B^2} * \underline{\arctan(B/G)}$$

$$\underline{I} = \underline{U}_q * \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} * \left[\varphi_q + \arctan\left(\frac{\omega C}{G}\right) \right] = U_q \varphi_i$$

$$I = U_q * \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} \quad \varphi_i = \varphi_q + \arctan\left(\frac{\omega C}{G}\right)$$

Arbeitsblatt EGII-6

Parallelschaltung R-C



Ergebnis: $\underline{I} = 5 \text{ A} \angle -75^\circ$

Bild EG659A

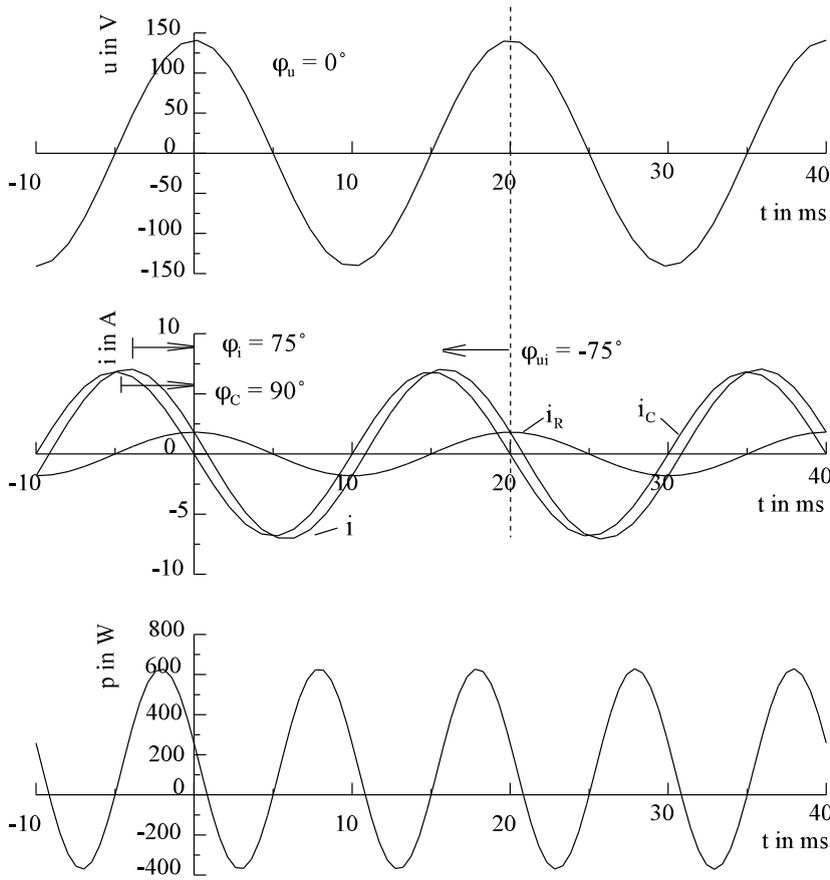
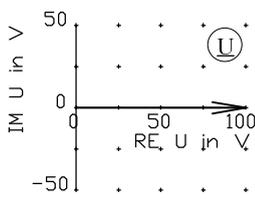
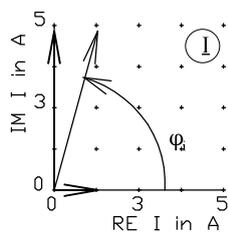


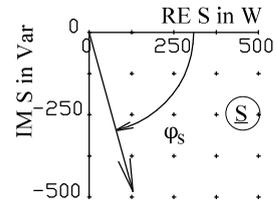
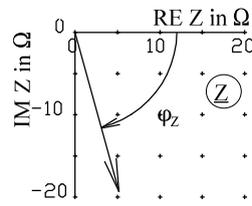
Bild EG659B



$\varphi_U = 0^\circ$
Bild EG659C



$\varphi_i = 75^\circ$



6.5.10. Komplexes ohmsches Gesetz, komplexer Widerstand und Leitwert

In den vorigen Kapiteln wurde schon abgeleitet:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

In diesen Kapitel soll weniger das ohmsche Gesetz diskutiert werden, als vielmehr die Bestimmung des komplexen Widerstandes und des komplexen Leitwertes wiederholt werden.

Bei der Wechselstromrechnung hat man als passive Zweipole nur drei ideale Elemente:

- Widerstand R
- Induktivität L und
- Kapazität C

Wie ideale Quellen transformiert werden, ist in Kap. 6.5.6 aufgezeigt worden. Zur komplexen Behandlung von Schaltungen benötigt man eigentlich nur noch den Ansatz des komplexen Widerstandes für R, L und C:

$$\begin{array}{ll} R & - \quad \underline{Z} = R \\ L & - \quad \underline{Z} = j\omega L \\ C & - \quad \underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} \end{array}$$

Damit evtl. einfacher gerechnet werden kann führt man folgende Begriffe ein:

- | | | |
|---|---|----------------------------|
| Z | - | Scheinwiderstand, Impedanz |
| X | - | Blindwiderstand, Reaktanz |
| R | - | Wirkwiderstand, Resistanz |
| | | |
| Y | - | Scheinleitwert, Admittanz |
| B | - | Blindleitwert, Suszeptanz |
| G | - | Wirkleitwert, Konduktanz |

A) Ohmscher Widerstand R

$$\underline{Z} = R$$



$$\underline{Z} = R \quad \underline{Y} = G = \frac{1}{R}, \varphi_z = 0^\circ$$

B) Induktivität L

$$\underline{Z} = j\omega L$$

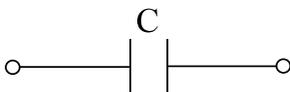


$$\underline{Z} = j\omega L = jX = \frac{1}{jB}$$

$$X = \omega L \quad B = -\frac{1}{X} \quad B = -\frac{1}{\omega L}, \varphi_z = 90^\circ$$

C) Kapazität C

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$$



$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{jB} = jX$$

$$B = \omega C \quad X = -\frac{1}{B} \quad X = -\frac{1}{\omega C}, \varphi_z = -90^\circ$$

D) R-L-Reihenschaltung

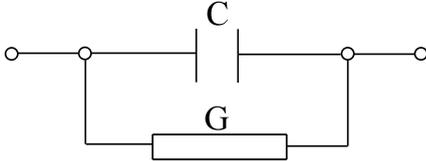
$$\underline{Z} = R + j\omega L$$



$$\underline{Z} = R + j\omega L = R + jX = Z \cdot e^{j\varphi}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi_Z = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$$

E) R-C-Parallelschaltung

$$\underline{Y} = G + j\omega C = G + jB = Y \cdot e^{j\varphi}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

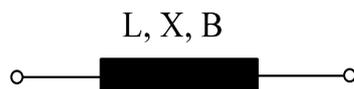
$$\varphi_Y = \arctan\left(\frac{B}{G}\right)$$

6.5.11. Leistung**6.5.11.1. Definition Leistung an R, L und C**

Wiederholung: Aus Berechnung an R und Definition an L und C ergibt sich



$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$



$$Q = U \cdot I = \frac{U^2}{\omega L} = \frac{U^2}{X} = I^2 \cdot X = -U^2 \cdot B$$

$$X = \omega L$$

$$B = -\frac{1}{\omega L}$$



$$Q = -U \cdot I = -U^2 \cdot \omega C = -U^2 \cdot B = -\frac{I^2}{B} = I^2 \cdot X$$

$$X = \frac{-1}{\omega C}$$

$$B = \omega C$$

$Q > 0$ induktive Blindleistung

$Q < 0$ kapazitive Blindleistung

[P] = W

[Q] = Var

[S] = VA

6.5.11.2. Leistung im Zeitbereich

Für $i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t)$

ergibt sich an R und L die Spannung

$$u_R(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t)$$

$$u_L(t) = -\hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

und die Leistung mit $p(t) = u(t) \cdot i(t)$

$$p_R(t) = \hat{i} \cdot \hat{u} \cdot \cos^2(\omega t)$$

$$p_L(t) = -\hat{i} \cdot \hat{u} \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t)$$

(A)

Aufgrund des Leistungsverlaufes (Kap. 6.5.1 und Kap. 6.5.2) können eine Wirkleistung berechnet und eine Blindleistung definiert werden:

$$P = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} * \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

$$P = I * U$$

$$Q = \frac{\hat{i}}{2} * \frac{\hat{u}}{2}$$

$$Q = I * U$$

Obere Formeln gelten nur für $\varphi = 0^\circ$ oder $\varphi = 90^\circ$ Phasenverschiebung. Für eine allgemeine Phasenverschiebung mit

$$(\varphi_i = 0, \varphi_u = \varphi = \varphi_{ui})$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

wird die Leistung berechnet:

$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = \hat{i} \cdot \hat{u} \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$p(t) = \hat{i} \cdot \hat{u} \cdot \cos(\omega t) \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\omega t) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\omega t)]$$

$$p(t) = \hat{i} \cdot \hat{u} \cdot \cos^2(\omega t) \cdot \cos(\varphi) - \hat{i} \cdot \hat{u} \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi)$$

Der Vergleich mit den oberen idealen Zweipolen R und L -siehe Gleichung (A)- lässt erkennen, dass der erste Term in der oberen Gleichung einer Wirkleistung entspricht:

$$P = U * I * \cos(\varphi) = U * I * \cos(\varphi_{ui})$$

und der zweite Term einer Blindleistung:

$$Q = U * I * \sin(\varphi) = U * I * \sin(\varphi_{ui})$$

entspricht. Im allgemeinen Fall, wenn $\varphi_i \neq 0$ ist, muss $\varphi = \varphi_{ui}$ gesetzt werden.

6.5.11.3. Komplexe Leistung

Die Leistungskomponenten setzen sich aus Wirk- und Blindleistung zusammen. Die komplexe Leistung als Scheinleistung wird wie folgt definiert:

$$\underline{S} = P + jQ$$

Einsetzen der oberen Komponenten ergibt:

$$\underline{S} = U * I * \cos(\varphi_{ui}) + jU * I \sin(\varphi_{ui})$$

$$\underline{S} = U * I * [\cos(\varphi_{ui}) + j \sin(\varphi_{ui})]$$

$$\underline{S} = U * I * e^{j\varphi_{ui}} = U * I * e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\underline{S} = U * e^{j\varphi_u} * I * e^{-j\varphi_i}$$

Die komplexe Leistung lässt sich mit Hilfe der komplexen Größe \underline{U} und \underline{I} ausdrücken

$$\underline{U} = U * e^{j\varphi_u}$$

$$\underline{I} = I * e^{j\varphi_i}$$

$$\underline{I}^* = I * e^{-j\varphi_i}$$

Damit ergibt sich die komplexe Leistung

$$\underline{S} = \underline{U} * \underline{I}^*$$

aus der komplexen Spannung multipliziert mit dem konjugiert komplexen Strom.

In Betragsschreibweise
$$\underline{S} = S * e^{j\varphi_s} = U * I * e^{j\varphi_{ui}}$$

lässt sich ablesen
$$S = U * I$$

$$\varphi = \varphi_s = \varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$$

Der Betrag der Scheinleistung ergibt sich aus dem Produkt der Beträge von Strom und Spannung. Der Winkel der Scheinleistung ist der Winkel von φ_{ui} .

Ersetzen des Stromes ergibt:
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{U} * \underline{Y} \quad \underline{I}^* = \frac{\underline{U}^*}{\underline{Z}^*} = \underline{U}^* * \underline{Y}^*$$

$$\underline{S} = \underline{U} * \underline{I}^* = \underline{U} * \underline{U}^* * \frac{1}{\underline{Z}^*} = \underline{U} * \underline{U}^* * \underline{Y}^* \quad \underline{U} * \underline{U}^* = U^2$$

$$\underline{S} = \frac{U^2}{\underline{Z}^*} = U^2 * \underline{Y}^*$$

Ersetzen der Spannung liefert:
$$\underline{U} = \underline{Z} * \underline{I} \quad \underline{S} = \underline{U} * \underline{I}^* = \underline{Z} * \underline{I} * \underline{I}^* \quad \underline{I} * \underline{I}^* = I^2$$

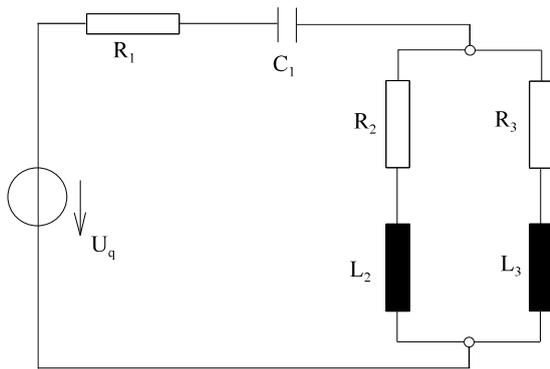
$$\underline{S} = \underline{Z} * I^2 = \frac{I^2}{\underline{Y}}$$

Damit lässt sich auch nachträglich die komplexe Leistung auf den Arbeitsblättern EGII-1 bis EGII-6 erklären.

6.5.12. Beispiele, Aufgaben und Fragen zu Kap. 6.5

Beispiel 1

In der folgenden Schaltung sind für jeden Zweig $v = 1 \dots 3$ zu berechnen: $u_v(t)$, $i_v(t)$, U_v , I_v , \underline{S}_v , P_v , Q_v , P_q , Q_q , S_q



$$\begin{aligned} \underline{u}_q &= 10 \text{ V } \cos(\omega t) \\ R_1 &= 50 \text{ } \Omega \\ C_1 &= 0.3316 \text{ } \mu\text{F} \\ R_2 &= 80 \text{ } \Omega \\ L_2 &= 3.183 \text{ mH} \\ R_3 &= 100 \text{ } \Omega \\ L_3 &= 5.305 \text{ mH} \\ f &= 6 \text{ kHz} \end{aligned}$$

Bild EG65114

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 6 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} = 37.70 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$B_1 = \omega \cdot C_1 = 37.70 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \cdot 0.3316 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 0.0125 \text{ S}$$

$$X_1 = \frac{1}{-B_1} = \frac{1}{-0.0125 \text{ S}} = -80 \text{ } \Omega$$

$$X_2 = \omega \cdot L_2 = 37.70 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \cdot 3.183 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 120 \text{ } \Omega$$

$$X_3 = \omega \cdot L_3 = 37.70 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \cdot 5.305 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 200 \text{ } \Omega$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = (50 - j80) \Omega = 94.3 \text{ } \Omega \angle -57.99^\circ$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = (80 + j120) \Omega = 144.2 \text{ } \Omega \angle 56.31^\circ$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 = (100 + j200) \Omega = 223.6 \text{ } \Omega \angle 63.43^\circ$$

$$\underline{U}_q = 7.071 \text{ V } \angle 0^\circ$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 87.84 \text{ } \Omega \angle 59.10^\circ$$

$$\underline{Z}_{123} = \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_1 = 95.22 \text{ } \Omega \angle -2.79^\circ$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_{123}} = \frac{7.071 \text{ V } \angle 0^\circ}{95.22 \text{ } \Omega \angle -2.79^\circ} = 74.26 \text{ mA } \angle 2.79^\circ$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 = 7.006 \text{ V } \angle -55.21^\circ$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_q - \underline{U}_1 = 6.523 \text{ V } \angle 61.89^\circ$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = 45.23 \text{ mA } \angle 5.58^\circ$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = 29.17 \text{ mA } \angle -1.55^\circ$$

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* = 520.3 \text{ mVA } \angle -57.99^\circ = 276 \text{ mW} - j441 \text{ mVar}$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_{23} \cdot \underline{I}_2^* = 295.0 \text{ mVA } \angle 56.31^\circ = 164 \text{ mW} + j245 \text{ mVar}$$

$$\underline{S}_3 = \underline{U}_{23} \cdot \underline{I}_3^* = 190.3 \text{ mVA } \angle 63.43^\circ = 85 \text{ mW} + j170 \text{ mVar}$$

$$\underline{S}_q = \underline{U}_q \cdot \underline{I}_1^* = 525.1 \text{ mVA } \angle -2.79^\circ = 525 \text{ mW} - j26 \text{ mVar}$$

$$P_1 = 276 \text{ mW}$$

$$Q_1 = -441 \text{ mVar}$$

$$S_1 = 520 \text{ mVA}$$

$$P_2 = 164 \text{ mW}$$

$$Q_2 = 245 \text{ mVar}$$

$$S_2 = 295 \text{ mVA}$$

$$P_3 = 85 \text{ mW}$$

$$Q_3 = 170 \text{ mVar}$$

$$S_3 = 190 \text{ mVA}$$

$$P_q = 525 \text{ mW}$$

$$Q_q = -26 \text{ mVar}$$

$$S_q = 525 \text{ mVA}$$

$$u_1(t) = 9.91 \text{ V} \cdot \cos(\omega t - 55.21^\circ)$$

$$u_2(t) = 9.22 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 61.89^\circ) = u_3(t)$$

$$i_1(t) = 105 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t + 2.79^\circ)$$

$$i_2(t) = 64.0 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t + 5.58^\circ)$$

$$i_3(t) = 41.3 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t - 1.55^\circ)$$

Fazit: Wechselstromnetze können wie Gleichstromnetze berechnet werden, nur mit Hilfe der komplexen Rechnung

R $\rightarrow \underline{Z} = R$

L $\rightarrow \underline{Z} = j\omega L$

C $\rightarrow \underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$

$\sqrt{2} * U * \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{U} / \varphi$

Beispiel 2

An einem Bauteil werden gemessen:

$$u(t) = 20 \text{ V} * \cos(\omega t + 25^\circ)$$

$$i(t) = 10 \text{ A} * \cos(\omega t + 70^\circ)$$

Berechnen Sie Wirk-, Blind- und Scheinleistung.

Lösungsweg:

$$\hat{u} = 20 \text{ V}$$

$$U = \hat{u} / \sqrt{2} = 20 \text{ V} / \sqrt{2} = 14.1 \text{ V}$$

$$\underline{U} = 14.1 \text{ V} / 25^\circ$$

$$\hat{i} = 10 \text{ A}$$

$$I = \hat{i} / \sqrt{2} = 10 \text{ A} / \sqrt{2} = 7.07 \text{ A}$$

$$\underline{I} = 7.07 \text{ A} / 70^\circ$$

$$\underline{S} = \underline{U} * \underline{I}^* = (14.1 \text{ V} / 25^\circ) * (7.07 \text{ A} / 70^\circ)^* = 100 \text{ VA} / -45^\circ = (70.7 - j70.7) \text{ VA}$$

$$P = \text{Re}(\underline{S}) = 70.7 \text{ W}$$

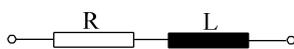
$$Q = \text{Im}(\underline{S}) = -70.7 \text{ var}$$

$$S = |\underline{S}| = 100 \text{ VA}$$

Beispiel 3

An einer Reihenschaltung von $R = 100 \Omega$ und $L = 100 \text{ mH}$ wird eine Phasenverschiebung $\varphi_{ui} = 45^\circ$ gemessen.

Wie groß ist die Frequenz f .



gegeben: $R = 100 \Omega$ $\varphi_{ui} = 45^\circ$ $L = 100 \text{ mH}$
gesucht: f

Lösungsweg:

$$\underline{Z} = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2} \left| \arctan \frac{X}{R} \right.$$

$$\varphi_Z = \arctan \left(\frac{X}{R} \right) = \varphi_{ui} = \varphi$$

$$\frac{X}{R} = \tan(\varphi)$$

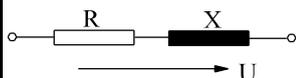
$$X = \tan(\varphi) * R = \tan(45^\circ) * R = R = 100 \Omega$$

$$X = \omega * L = 2\pi * f * L$$

$$f = \frac{X}{2\pi * L} = \frac{100 \text{ V/A}}{2\pi * 0.1 * \text{V/A}} = 159 \text{ Hz}$$

Beispiel 4

An einer Reihenschaltung von X und R wird eine Spannung $U = 200 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$ ein Strom $I = 2 \text{ A}$ und eine Wirkleistung $P = 240 \text{ W}$ gemessen. Wie groß sind ohmscher Widerstand R und Blindwiderstand X, bzw Induktivität L.



gegeben: $U = 200 \text{ V}$ $f = 50 \text{ Hz}$ $I = 2 \text{ A}$ $P = 240 \text{ W}$
gesucht: R, X, L

Lösungsweg:**Variante 1:**

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \quad \Rightarrow \quad S = U \cdot I = 200 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} = 400 \text{ VA}$$

$$\underline{S} = P + jQ \quad \Rightarrow \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(400 \text{ VA})^2 - (240 \text{ VA})^2} = 320 \text{ var}$$

$$P = I^2 \cdot R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{P}{I^2} = \frac{240 \text{ W}}{(2 \text{ A})^2} = 60 \Omega$$

$$Q = I^2 \cdot X \quad \Rightarrow \quad X = \frac{Q}{I^2} = \frac{320 \text{ var}}{(2 \text{ A})^2} = 80 \Omega$$

$$X = \omega L = 2\pi \cdot f \cdot L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{X}{2\pi \cdot f} = \frac{80 \Omega}{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1}} = 0.255 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 0.255 \text{ H}$$

Variante 2:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{U}{I} = \frac{200 \text{ V}}{2 \text{ A}} = 100 \Omega$$

$$P = I^2 \cdot R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{P}{I^2} = \frac{240 \text{ W}}{(2 \text{ A})^2} = 60 \Omega$$

$$\underline{Z} = R + jX \quad \Rightarrow \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \Rightarrow \quad X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(100 \Omega)^2 - (60 \Omega)^2} = 80 \Omega$$

Variante 3:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{U}{I} = \frac{200 \text{ V}}{2 \text{ A}} = 100 \Omega$$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \quad \Rightarrow \quad S = U \cdot I = 200 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} = 400 \text{ VA}$$

$$P = S \cdot \cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{240 \text{ W}}{400 \text{ VA}} = 0.6$$

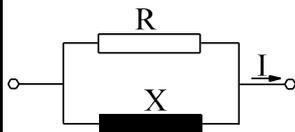
$$\cos(\varphi) = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi) = 0.8$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} = R + jX = Z \cdot [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] \quad \Rightarrow \quad R = Z \cdot \cos(\varphi) = 100 \Omega \cdot 0.6 = 60 \Omega$$

$$X = Z \cdot \sin(\varphi) = 100 \Omega \cdot 0.8 = 80 \Omega$$

Beispiel 5

An einer Parallelschaltung von R und L wird eine Spannung von $U = 20 \text{ V}$, $f = 500 \text{ Hz}$, ein Strom $I = 0.1 \text{ A}$ und eine Wirkleistung $P = 1.2 \text{ W}$ gemessen. Wie groß sind R und L.



gegeben: $U = 20 \text{ V}$ $f = 500 \text{ Hz}$ $I = 0.1 \text{ A}$ $P = 1.2 \text{ W}$
gesucht: R, L

Lösungsweg: Variante 1:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \Rightarrow S = U \cdot I = 20 \text{ V} \cdot 0.1 \text{ A} = 2 \text{ VA}$$

$$\underline{S} = P + jQ \Rightarrow S = \sqrt{P^2 + Q^2} \Rightarrow Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(2 \text{ VA})^2 - (1.2 \text{ W})^2} = 1.6 \text{ var}$$

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U^2}{P} = \frac{(20 \text{ V})^2}{1.2 \text{ VA}} = 333 \Omega$$

$$Q = \frac{U^2}{X} \Rightarrow X = \frac{U^2}{Q} = \frac{(20 \text{ V})^2}{1.6 \text{ VA}} = 250 \Omega$$

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{X}{2\pi \cdot f} = \frac{250 \text{ V/A}}{2\pi \cdot 500 \text{ s}^{-1}} = 79.6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 79.6 \text{ mH}$$

Variante 2:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \Rightarrow Y = \frac{I}{U} = \frac{0.1 \text{ A}}{20 \text{ V}} = 5 \text{ mS}$$

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U^2}{P} = \frac{(20 \text{ V})^2}{1.2 \text{ VA}} = 333 \Omega$$

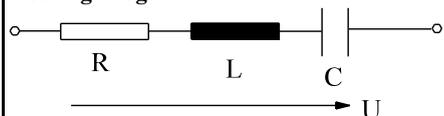
$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{333 \Omega} = 3 \text{ mS}$$

$$\underline{Y} = G + jB \Rightarrow Y = \sqrt{G^2 + B^2} \Rightarrow B = -\sqrt{Y^2 - G^2} = -\sqrt{(5 \text{ mS})^2 - (3 \text{ mS})^2} = -4 \text{ mS}$$

$$X = -\frac{1}{B} = -\frac{1}{-4 \cdot 10^{-3} \text{ S}} = 250 \Omega$$

Beispiel 6

In einer Reihenschaltung von $R = 300 \Omega$, $L = 0.15 \text{ H}$ und $C = 1.25 \mu\text{F}$ fließt bei einer Spannung von $U = 40 \text{ V}$ ein Strom $I = 80 \text{ mA}$. Wie groß ist die Frequenz f .

Lösungsweg:

gegeben: $R = 300 \Omega$ $L = 0.15 \text{ H}$ $U = 40 \text{ V}$
 $C = 1.25 \mu\text{F}$ $I = 80 \text{ mA}$
gesucht: f

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{U}{I} = \frac{40\text{V}}{0.08\text{A}} = 500\Omega$$

$$\underline{Z} = R + jX \quad \Rightarrow \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \Rightarrow \quad X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \pm\sqrt{(500\Omega)^2 - (300\Omega)^2} = \pm 400\Omega$$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad \left| \cdot \frac{\omega}{L} \right.$$

gesucht: ω

$$\omega^2 - \frac{X}{L} \omega - \frac{1}{L \cdot C} = 0$$

$$\omega_{1,2} = \frac{X}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{X}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}} = \frac{\pm 400\Omega}{2 \cdot 0.15 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}} \pm \sqrt{\left(\frac{\pm 400\Omega}{2 \cdot 0.15 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}}\right)^2 + \frac{1}{0.15 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 1.25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}}}$$

$$\omega_{1,2} = \pm 1333\text{s}^{-1} + \sqrt{(1333\text{s}^{-1})^2 + 5333 \cdot 10^3 \text{s}^{-2}} = \pm 1333\text{s}^{-1} + 26666\text{s}^{-1}$$

$$\omega_1 = 1333 \text{ s}^{-1}$$

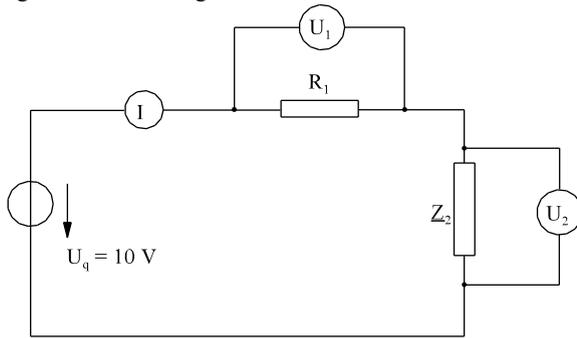
$$f_1 = 212 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = 4000 \text{ s}^{-1}$$

$$f_2 = 637 \text{ Hz}$$

Beispiel 7

Der unbekannte komplexe Widerstand $Z_2 = R_2 + jX_2$ und der unbekannte Widerstand R_1 sollen mit Hilfe der folgenden Schaltung bestimmt werden.



Gemessen wurden:

$$U_q = 10 \text{ V}, U_1 = 3 \text{ V}$$

$$I = 10 \text{ mA}, U_2 = 9 \text{ V}$$

Wie groß sind R_1 , R_2 und X_2 .

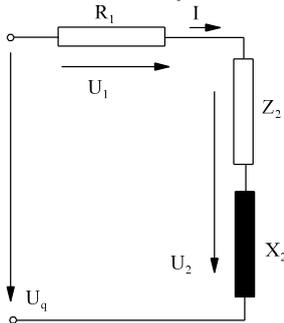
gegeben:

$$U_q = 10 \text{ V}$$

$$U_1 = 3 \text{ V}$$

$$I = 10 \text{ mA}$$

$$U_2 = 9 \text{ V}$$



$$Z_{\text{ges}} = \frac{U_q}{I} = \frac{10\text{V}}{10\text{mA}} = 1\text{k}\Omega$$

$$R_1 = \frac{U_1}{I} = \frac{3\text{V}}{10\text{mA}} = 300\Omega$$

$$Z_2 = \frac{U_2}{I} = \frac{9\text{V}}{10\text{mA}} = 900\Omega$$

$$Z_{\text{ges}} = (R_1 + R_2) + jX_2$$

$$Z_{\text{ges}}^2 = (R_1 + R_2)^2 + X_2^2 = R_1^2 + 2 * R_1 * R_2 + R_2^2 + X_2^2$$

$$Z_2 = R_2 + jX_2$$

$$Z_2^2 = R_2^2 + X_2^2$$

$$Z_{\text{ges}}^2 - Z_2^2 = R_1^2 + 2 * R_1 * R_2$$

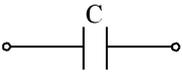
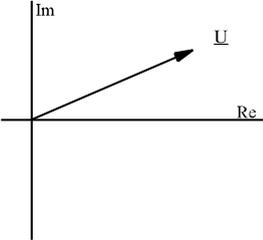
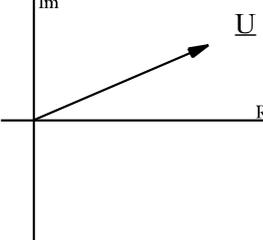
$$R_2 = \frac{Z_{\text{ges}}^2 - Z_2^2 - R_1^2}{2 * R_1} = \frac{(1000 \Omega)^2 - (900 \Omega)^2 - (300 \Omega)^2}{2 * 300 \Omega} = 167 \Omega$$

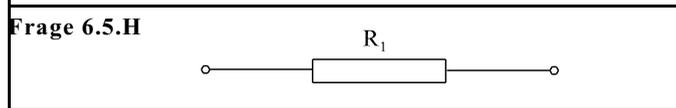
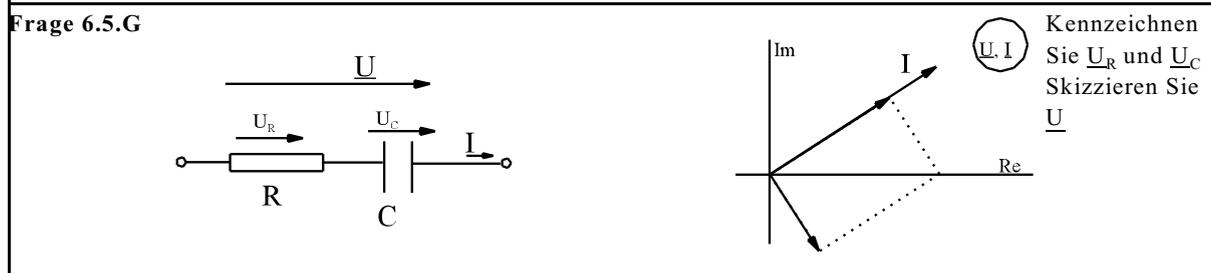
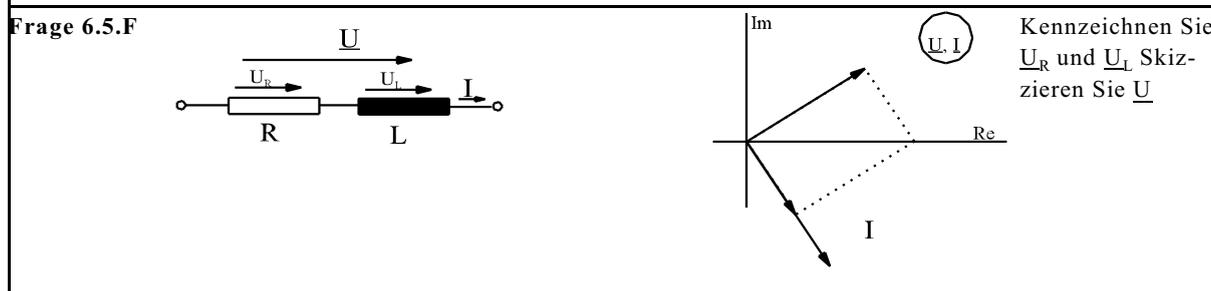
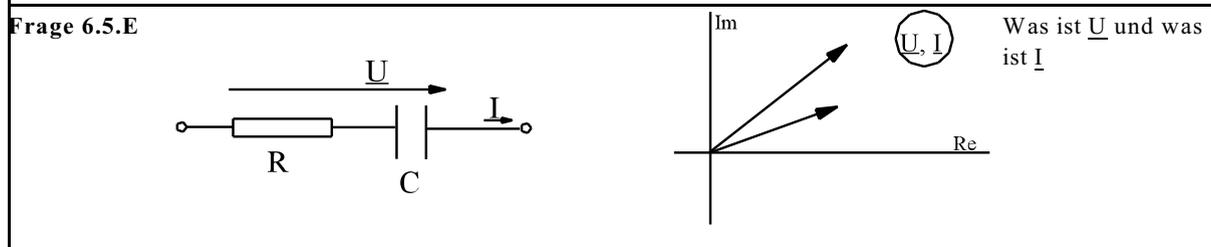
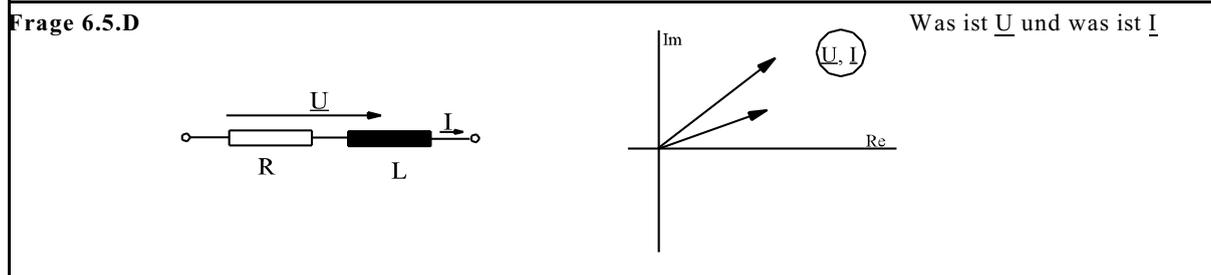
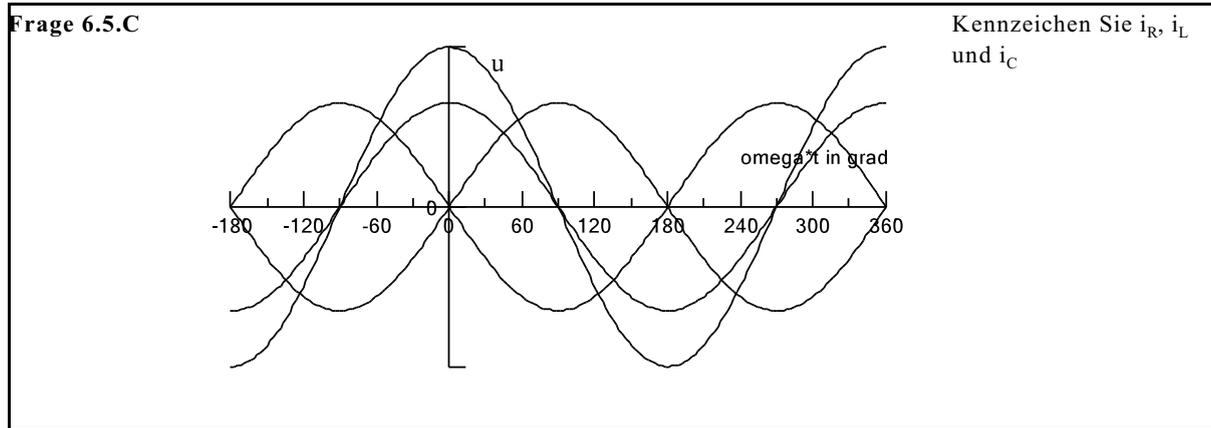
$$X_2 = \sqrt{Z_2^2 - R_2^2} = \sqrt{(900 \Omega)^2 - (166.7 \Omega)^2} = 884 \Omega$$

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.6.5.A	Der komplexe Widerstand Z ist definiert als das Verhältnis von:		
	* rotierendem Scheitelwertzeiger der Spannung zu rotierendem Scheitelwertzeiger des Stromes	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* ruhendem Scheitelwertzeiger der Spannung zu ruhendem Scheitelwertzeiger des Stromes	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Effektivwertzeiger der Spannung zu Effektivwertzeiger des Stromes	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* ruhendem Scheitelwertzeiger der Spannung zu rotierendem Scheitelwertzeiger des Stromes	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.5.B	Bei einer idealen Induktivität:		
	* eilt der Strom der Spannung um 90° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt die Spannung dem Strom um 90° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt der Strom der Spannung um 30° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt die Spannung dem Strom um 30° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
* eilt der Strom der Spannung um 120° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
* eilt die Spannung dem Strom um 120° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

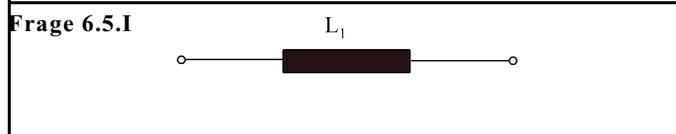
Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.6.5.C	Bei einer idealen Kapazität:		
	* eilt der Strom der Spannung um 90° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt die Spannung dem Strom um 90° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt der Strom der Spannung 30° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt die Spannung dem Strom um 30° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt der Strom der Spannung um 120° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt die Spannung dem Strom um 120° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.5.D	Bei einer Reihenschaltung R-L:		
	* eilt der Strom der Spannung um 90° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt die Spannung dem Strom um 90° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt der Strom der Spannung zwischen 0 und 90° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt die Spannung dem Strom zwischen 0 und 90° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt der Strom der Spannung zwischen 0 und 90° vor	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt die Spannung dem Strom zwischen 0 und 90° vor	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.5.E	Bei einer Reihenschaltung R-C:		
	* eilt der Strom der Spannung um 90° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt die Spannung dem Strom um 90° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt der Strom der Spannung zwischen 0 und 90° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt die Spannung dem Strom zwischen 0 und 90° nach	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt der Strom der Spannung zwischen 0 und 90° vor	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eilt die Spannung dem Strom zwischen 0 und 90° vor	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.5.F	Der Realteil der komplexen Leistung \underline{S} ist		
	* Scheinleistung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkleistung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindleistung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.5.G	Der Imaginärteil der komplexen Leistung \underline{S} ist		
	* Scheinleistung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkleistung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindleistung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.5.H	Der Betrag der komplexen Leistung \underline{S} ist		
	* Scheinleistung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkleistung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindleistung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.5.I	Mit Z wird in Wechselstromkreisen bezeichnet:		
	* Scheinwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Scheinleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Impedanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Reaktanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Resistanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Admittanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.5.J	Mit R wird in Wechselstromkreisen bezeichnet:		
	* Scheinwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Scheinleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Impedanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Reaktanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Resistanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Admittanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.5.K	Mit X wird in Wechselstromkreisen bezeichnet:		
	* Scheinwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Scheinleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Impedanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Reaktanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Resistanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Admittanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.6.5.L	Mit Y wird in Wechselstromkreisen bezeichnet:		
	* Scheinwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Scheinleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Impedanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Reaktanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Resistanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Admittanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.5.M	Mit B wird in Wechselstromkreisen bezeichnet:		
	* Scheinwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Scheinleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Impedanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Reaktanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Resistanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Admittanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.5.O	Mit G wird in Wechselstromkreisen bezeichnet:		
	* Scheinwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkwiderstand	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Scheinleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Wirkleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Blindleitwert	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Impedanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Reaktanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Resistanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Admittanz	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

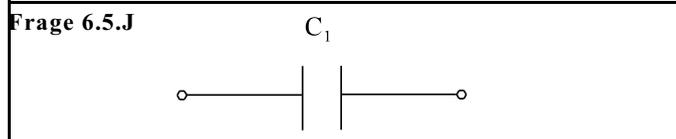
<p>Frage 6.5.A</p> 		<p>Zeichnen Sie <u>I</u> ein</p>
<p>Frage 6.5.B</p> 		<p>Zeichnen Sie <u>I</u> ein</p>



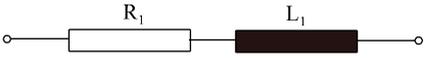
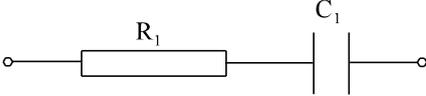
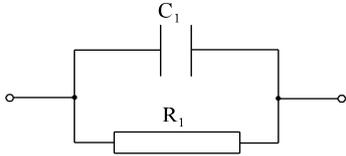
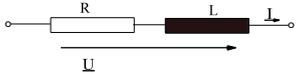
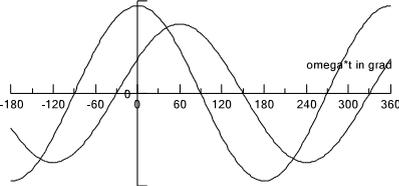
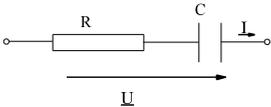
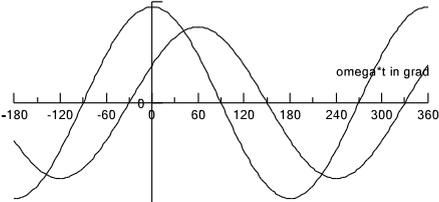
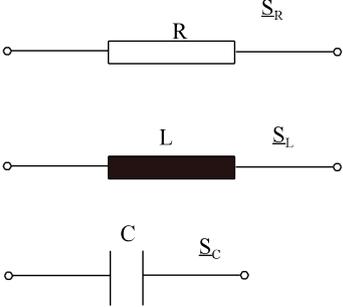
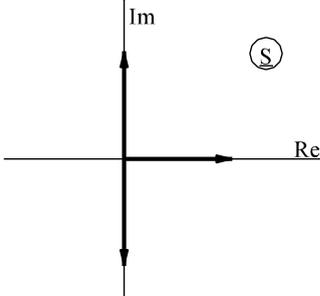
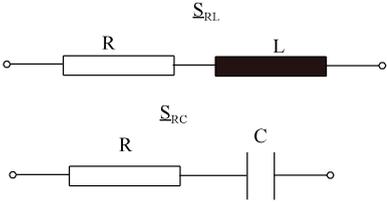
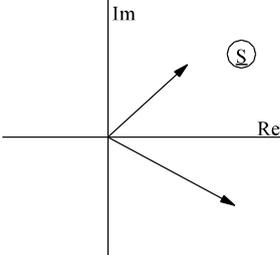
$\underline{Z} =$



$\underline{Z} =$ $X =$
 $B =$ \underline{Y}



$\underline{Z} =$ $X =$
 $B =$ $\underline{Y} =$

<p>Frage 6.5.K</p> 	<p>$\underline{Z} =$ $Z =$</p> <p>$\varphi_Z =$</p>
<p>Frage 6.5.L</p> 	<p>$\underline{Z} =$ $Z =$</p> <p>$\varphi_Z =$</p>
<p>Frage 6.5.M</p> 	<p>$\underline{Y} =$ $Y =$</p> <p>$\varphi_Z =$ $Z =$</p> <p>$\varphi_Z =$</p>
<p>Frage 6.5.N</p>   <p style="text-align: right;">Kennzeichnen Sie $u(t)$ und $i(t)$</p>	
<p>Frage 6.5.O</p>   <p style="text-align: right;">Kennzeichnen Sie $u(t)$ und $i(t)$</p>	
<p>Frage 6.5.P</p> 	<p style="text-align: right;">Kennzeichnen Sie \underline{S}_C, \underline{S}_R und \underline{S}_L</p> 
<p>Frage 6.5.Q</p> 	<p style="text-align: right;">Kennzeichnen Sie \underline{S}_{RC} und \underline{S}_{RL}</p> 
<p>Frage 6.5.R An einer Induktivität eilt nach:</p>	
<p>Frage 6.5.S An einer Kapazität eilt nach:</p>	
<p>Frage 6.5.T An einem Widerstand eilt nach:</p> <p style="text-align: center;">-----</p>	

Frage 6.5.W	Der Realteil der komplexen Leistung \underline{S} ist	_____
Frage 6.5.V	Der Imaginärteil der komplexen Leistung \underline{S} ist	_____
Frage 6.5.X	Der Betrag der komplexen Leistung \underline{S} ist	_____
Frage 6.5.Y	Die Scheinleistung wird angegeben in (Einheit von S)	_____
Frage 6.5.Z	Die Wirkleistung wird angegeben in (Einheit von P)	_____
Frage 6.5.a	Die Blindleistung wird angegeben in (Einheit von Q)	_____
Frage 6.5.b	Mit Z wird in Wechselstromkreisen bezeichnet:	(2 Antworten)

Frage 6.5.c	Mit R wird in Wechselstromkreisen bezeichnet:	(2 Antworten)

Frage 6.5.d	Mit X wird in Wechselstromkreisen bezeichnet:	(2 Antworten)

Frage 6.5.e	Mit Y wird in Wechselstromkreisen bezeichnet:	(2 Antworten)

Frage 6.5.f	Mit B wird in Wechselstromkreisen bezeichnet:	

Frage 6.5.g	Mit G wird in Wechselstromkreisen bezeichnet:	

Die Aufgaben 6.5.A bis 6.5.F sind sehr einfach und sollten von denjenigen nur berechnet werden die Verständnisprobleme haben.

Aufgabe 6.5.A (einfach)

An einem ohmschen Widerstand $R = 10 \Omega$ ist der Spannungsverlauf $u(t) = 141 \text{ V} \cdot \cos(314 \text{ t/s} - 50^\circ)$. Geben Sie den Zeitverlauf des Stromes $i(t)$ an. Berechnen Sie die Größen \hat{u} , \hat{i} , U , I , φ_u , φ_i und φ . Bestimmen Sie die Wirkleistung P und die Blindleistung Q . Geben Sie die komplexen Größen \underline{U} , \underline{I} , \underline{Z} und \underline{S} an.

Aufgabe 6.5.B (einfach)

In einer idealen Induktivität von $L = 0.2 \text{ H} = 0.2 \text{ Vs/A}$ fließt ein Strom $i(t) = 2 \text{ A} \cdot \cos(314 \text{ t/s} - 20^\circ)$. Berechnen Sie die Größen \hat{u} , \hat{i} , U , I , φ_u , φ_i und φ . Geben Sie den Zeitverlauf der Spannung $u(t)$ an. Bestimmen Sie die Wirkleistung P und die Blindleistung Q . Geben Sie die komplexen Größen \underline{U} , \underline{I} , \underline{Z} und \underline{S} an.

Aufgabe 6.5.C (einfach)

An einem Kondensator von $C = 2 \mu\text{F} = 2 \mu\text{As/V}$ liegt eine Spannung von $u(t) = 14.1 \text{ V} \cdot \cos(6280 \text{ t/s} + 30^\circ)$. Berechnen Sie die Größen $i(t)$, \hat{u} , \hat{i} , U , I , φ_u , φ_i , φ , P und Q . Geben Sie die komplexen Größen \underline{U} , \underline{I} , \underline{Z} und \underline{S} an.

Aufgabe 6.5.D (einfach)

An der Reihenschaltung einer idealen Induktivität von $L = 0,5$ H und eines Ohmschen Widerstandes $R = 100 \Omega$ liegt eine Spannung von $U = 100$ V, $f = 50$ Hz, $\varphi_u = 0^\circ$. Berechnen Sie den Zeitverlauf $u_R(t)$, $u_L(t)$, $i(t)$ mit Hilfe der komplexen Rechnung. Wie groß ist Blind- und Wirkleistung?

Aufgabe 6.5.E (einfach)

In einer Parallelschaltung eines Kondensators von $C = 0,1 \mu\text{F} = 0,1 \mu\text{As/V}$ und eines Widerstandes $R = 3 \text{ k}\Omega$ fließt ein Gesamtstrom von $I = 10 \text{ mA}$, $\varphi_i = 0^\circ$. Berechnen Sie \underline{U} . $f = 1 \text{ kHz}$

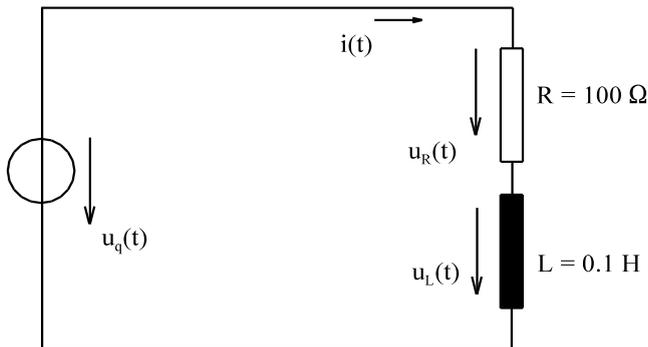
Aufgabe 6.5.F (einfach)

An einem Bauteil werden gemessen:

$$u(t) = 10 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 60^\circ)$$

$$i(t) = 5 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t + 15^\circ)$$

Berechnen Sie Wirk-, Blind- und Scheinleistung.

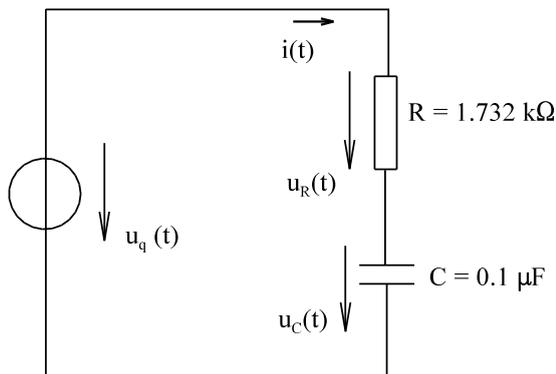
**Aufgabe 6.5.G**

$$f = \frac{1000 \text{ Hz}}{2\pi}$$

$$u_q(t) = 10 \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$$

gegeben: $u_q(t)$, f , R , L

gesucht: $i(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$, S , P , Q

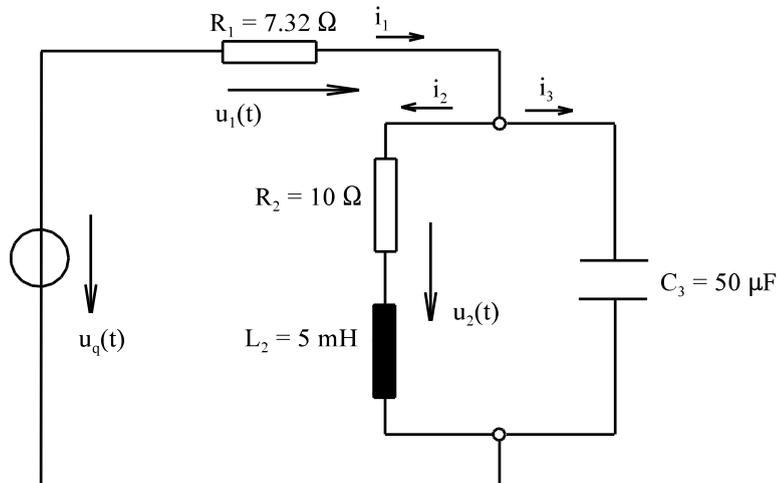
**Aufgabe 6.5.H**

$$f = \frac{10 \text{ kHz}}{2\pi}$$

$$u_q(t) = 14,1 \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$$

gegeben: $u_q(t)$, f , R , L

gesucht: $i(t)$, $u_R(t)$, $u_C(t)$, S , P , Q

Aufgabe 6.5.I

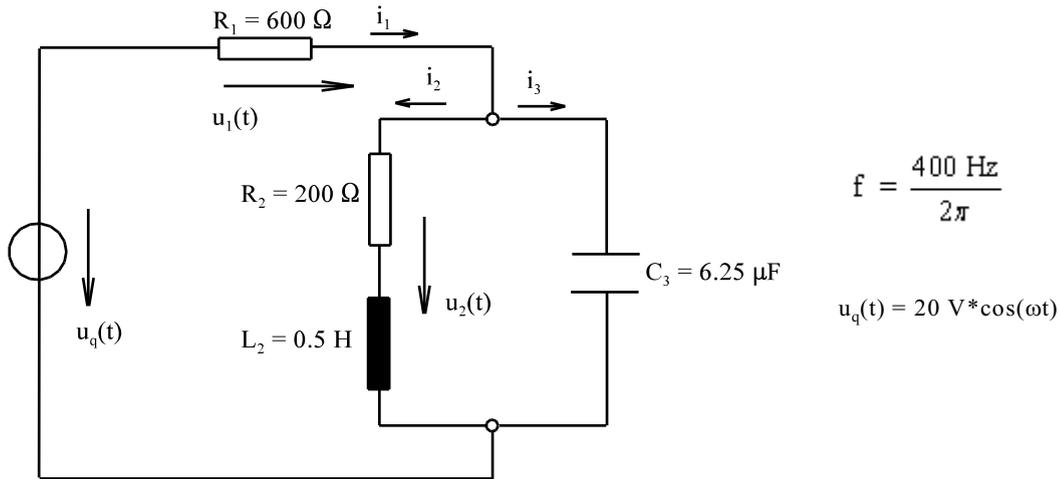
$$f = \frac{2 \text{ kHz}}{2\pi}$$

$$u_q(t) = 14,1 \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$$

gegeben: $u_q(t)$, R_1 , R_2 , L_2 , C_3 , f

gesucht: $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$

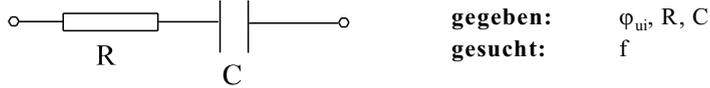
Aufgabe 6.5.J



gegeben: $u_q(t), R_1, R_2, L_2, C_3, f$
gesucht: $i_1(t), i_2(t), i_3(t), u_1(t), u_2(t)$

Aufgabe 6.5.K

An einer Reihenschaltung von $R = 5 \text{ k}\Omega$ und $C = 20 \text{ nF}$ wird eine Phasenverschiebung $\varphi_{ui} = -60^\circ$ gemessen. Wie groß ist die Frequenz f .



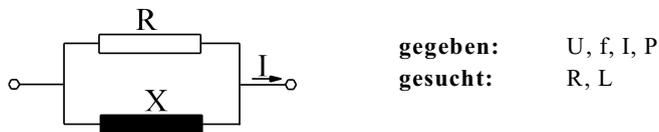
Aufgabe 6.5.L

An einer Reihenschaltung von X und R wird eine Spannung $U = 10 \text{ V}$, $f = 5 \text{ kHz}$ ein Strom $I = 20 \text{ mA}$ und eine Wirkleistung $P = 0.16 \text{ W}$ gemessen. Wie groß sind ohmscher Widerstand R und Blindwiderstand X , bzw Induktivität L .



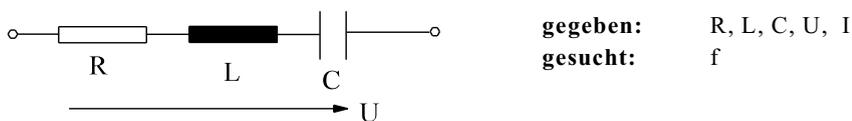
Aufgabe 6.5.M

An einer Parallelschaltung von R und L wird eine Spannung von $U = 20 \text{ V}$, $f = 20 \text{ kHz}$, ein Strom $I = 5 \text{ mA}$ und eine Wirkleistung $P = 30 \text{ mW}$ gemessen. Wie groß sind R und L .



Aufgabe 6.5.N

In einer Reihenschaltung von $R = 60 \Omega$, $L = 0.1025 \text{ H}$ und $C = 4 \mu\text{F}$ fließt bei einer Spannung von $U = 200 \text{ V}$ ein Strom $I = 2 \text{ A}$. Wie groß ist die Frequenz f .



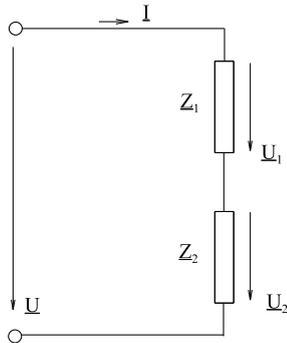
6.6. Erweiterte Schaltungen	83
6.6.1. Spannungsteiler	83
6.6.2. Stromteiler	84
6.6.3. Wechselstrombrücken	86
6.6.3.1. Komplexe Abgleichbedingung	86
6.6.3.2. Messung einer realen Kapazität	86
6.6.3.3. Messung einer realen Induktivität	87
6.6.4. Blindstromkompensation	89
6.6.5. Leistungsanpassung	92
6.6.5.1. Wirkleistungsanpassung	93
6.6.5.2. Scheinleistungsanpassung	94
6.6.5.3. Leistungsanpassung an einem ohmschen Widerstand	94
6.6.6. Umwandlung Reihenschaltung \Leftrightarrow Parallelschaltung	97
6.6.7. Fragen und Aufgaben zu Kap. 6.6	98

6.6. Erweiterte Schaltungen

In diesem Abschnitt sollen Anwendungen von Wechselstrom-Schaltungen behandelt werden:

- Spannungsteiler
- Stromteiler
- Wechselstrombrücken
- Blindstromkompensation
- Leistungsanpassung
- Umwandlung Reihen- und Parallelschaltung

6.6.1. Spannungsteiler



Die Spannungsteiler-Regel ist schon aus dem Gleichstromkreis bekannt. (Ableitung in ähnlicher Weise)

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 * \underline{I} = \underline{U} * \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 * \underline{I} = \underline{U} * \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Bild EG661A

$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$	$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$	$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$
---	---	---

Genau wie im Gleichstromkreis verhalten sich die Spannungen in einer Reihenschaltung entsprechend den Widerständen. Hier muss das Verhältnis der komplexen Spannungen und komplexen Widerstände berücksichtigt werden.

Beispiel 1 (Klausur 03.07.1999 Aufgabe 2)

Berechnen Sie nur die Spannung $u_4(t)$ in der Form:
 $u_4(t) = \hat{u}_4 * \cos(\omega t + \varphi_4)$

Gegebene Daten:
 $u_{q1}(t) = 160 \text{ V} * \cos(\omega t)$
 $u_{q2}(t) = 160 \text{ V} * \sin(\omega t)$
 $u_{q6}(t) = 50 \text{ V} * \cos(\omega t)$

Lösungsweg: Aus Maschenumlauf:
(Die restlichen Element haben keinen Einfluss)

$$u_{34}(t) = u_{q1}(t) - u_{q2}(t)$$

$$\hat{u}_{q1} = 160 \text{ V} / 0^\circ = 160 \text{ V} + j0$$

$$\hat{u}_{q2} = 160 \text{ V} / -90^\circ = 0 - j160 \text{ V}$$

$$\hat{u}_{34} = \hat{u}_{q1} - \hat{u}_{q2} = 160 \text{ V} + j160 \text{ V} = \sqrt{2} * 160 \text{ V} / 45^\circ$$

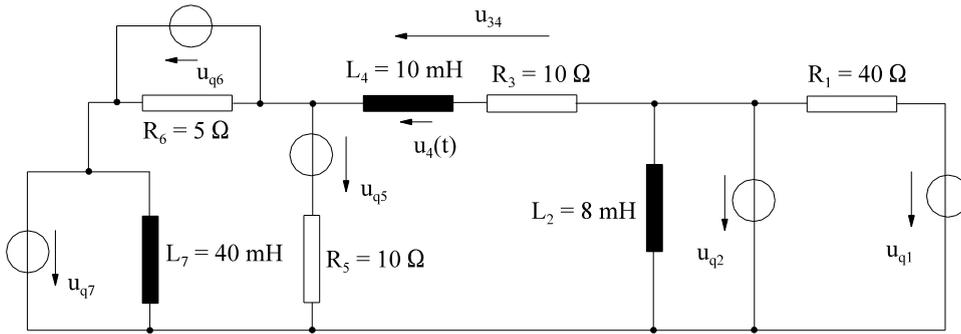
$$\hat{u}_4 = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} * \hat{u}_{34} = \frac{1}{\frac{j\omega * C_4}{1} + \frac{1}{j\omega * C_3}} * \hat{u}_{34} = \frac{C_3}{C_4 + C_3} * \hat{u}_{34} = \frac{5 \mu\text{F}}{3 \mu\text{F} + 5 \mu\text{F}} * \sqrt{2} * 160 \text{ V} / 45^\circ$$

$$\hat{u}_4 = \sqrt{2} * 100 / 45^\circ = 141 \text{ V} / 45^\circ$$

$$u_4(t) = 141 \text{ V} * \cos(\omega t + 45^\circ) \quad \hat{u}_4 = 141 \text{ V} \quad \varphi_4 = 45^\circ$$

Beispiel 2

Im folgenden Netzwerk ist nur die Spannung $u_4(t)$ zu bestimmen. Hinweis: Bei Anwendung bestimmter Regeln ist der Aufwand relativ gering. Die Berechnung ohne Taschenrechner ist möglich, aber nicht zu empfehlen.



Gegeben Daten:

$$u_{q1}(t) = 10 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 40^\circ) \quad u_{q2}(t) = 10 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 45^\circ) \quad u_{q5}(t) = 50 \text{ V} \cdot \sin(\omega t + 60^\circ)$$

$$u_{q6}(t) = 14.14 \text{ V} \cdot \sin(\omega t) \quad u_{q7}(t) = 20 \text{ V} \cdot \cos(\omega t - 45^\circ) \quad f = \frac{1 \text{ kHz}}{2\pi}$$

Lösungsweg:

Aus Maschenumlauf:

(Die restlichen Element haben keinen Einfluss)

$$u_{34}(t) = u_{q2}(t) - u_{q6}(t) - u_{q7}(t)$$

$$\hat{u}_{q2} = 10 \text{ V} / 45^\circ = 7.07 \text{ V} + j 7.07 \text{ V}$$

$$\hat{u}_{q6} = 14.14 \text{ V} / -90^\circ = 0 - j14.14 \text{ V}$$

$$\hat{u}_{q7} = 20 \text{ V} / -45^\circ = 7.07 \text{ V} - j7.07 \text{ V}$$

$$\hat{u}_{34} = \hat{u}_{q2} - \hat{u}_{q6} - \hat{u}_{q7} = (7.07 \text{ V} + j 7.07 \text{ V}) - (0 - j14.14 \text{ V}) - (7.07 \text{ V} - j 7.07 \text{ V}) = 0 + j28.28 \text{ V} = 28.28 \text{ V} / 90^\circ$$

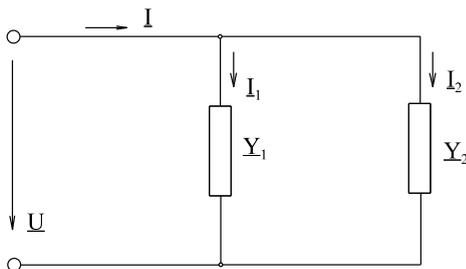
$$\hat{u}_4 = \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \cdot \hat{u}_{34} = \frac{j\omega \cdot L_4}{R_3 + j\omega \cdot L_4} \cdot \hat{u}_{34}$$

$$j\omega \cdot L_4 = j2\pi \cdot \frac{1000}{2\pi} \text{ s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = j10\Omega$$

$$\hat{u}_4 = \frac{j10\Omega}{10\Omega + j10\Omega} \cdot \hat{u}_{34} = \frac{10\Omega / 90^\circ}{14.14\Omega / 45^\circ} \cdot 28.28 / 90^\circ = 20 \text{ V} / 135^\circ$$

$$u_4(t) = 20 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 135^\circ)$$

6.6.2. Stromteiler



Auch die Stromteiler-Regel ist schon aus dem Gleichstromkreis bekannt.

$$I_1 = \underline{U} \cdot \underline{Y}_1 / \underline{I}_2 = \underline{U} \cdot \underline{Y}_2$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{U} \cdot (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)$$

Bild EG662A

$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$	$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$	$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2}$
---	---	---

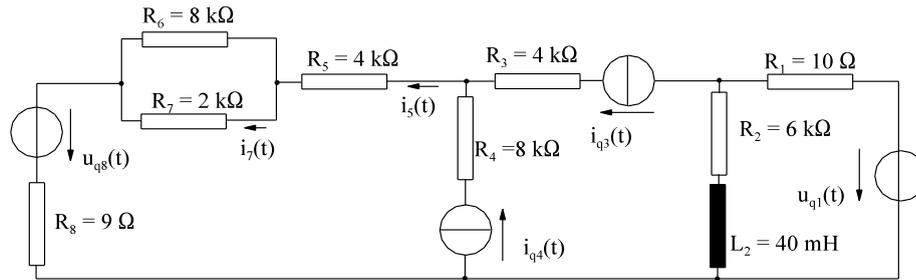
Auch hier verhalten sich die Ströme entsprechend den Leitwerten. Das Verhältnis der komplexen Ströme entspricht dem Verhältnis der zugehörigen komplexen Leitwerte.

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}}$$

$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$	$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$	$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$
---	---	---

Beispiel 1

Im folgenden Netzwerk ist nur der Strom $i_7(t)$ zu bestimmen. Hinweis: Bei Anwendung bestimmter Regeln ist der Aufwand relativ gering. Die Berechnung ohne Taschenrechner ist möglich, aber nicht zu empfehlen.

**Gegebene Daten des Netzwerks:**

$$u_{q1}(t) = 15 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 20^\circ)$$

$$u_{q2}(t) = 200 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 70^\circ) \quad u_{q8}(t) = 18 \text{ V} \cdot \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$i_{q3}(t) = 10 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t)$$

$$i_{q4}(t) = 10 \text{ mA} \cdot \sin(\omega t) \quad f = 10 \text{ kHz} / (2\pi)$$

Lösungsweg:

$$i_5(t) = i_{q3}(t) + i_{q4}(t)$$

$$\hat{i}_5 = \hat{i}_{q3} + \hat{i}_{q4}$$

$$\hat{i}_{q3} = 10 \text{ mA} / 0^\circ = 10 \text{ mA} + j0$$

$$\hat{i}_{q4} = 10 \text{ mA} / -90^\circ = 0 - j10 \text{ mA}$$

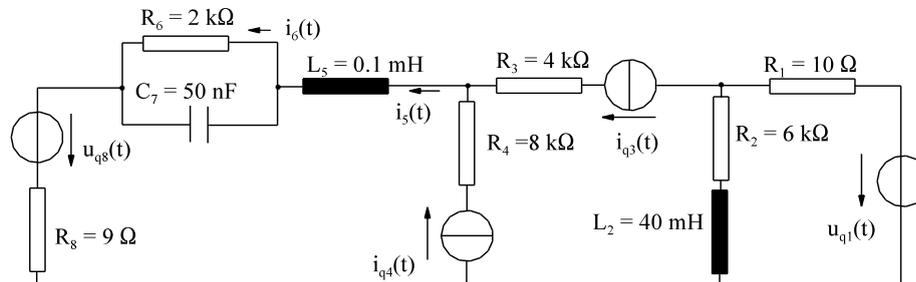
$$\hat{i}_{\tilde{5}} = 10 \text{ mA} - j10 \text{ mA} = \sqrt{2} * 10 \text{ mA} / -45^\circ = 14.14 \text{ mA} / -45^\circ$$

$$\hat{i}_{\tilde{7}} = \frac{R_6}{R_6 + R_7} * \hat{i}_{\tilde{5}} = \frac{8 \text{ k}\Omega}{8 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega} * 14.14 \text{ mA} / -45^\circ = 11.3 \text{ mA} / -45^\circ$$

$$i_7(t) = 11.3 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t - 45^\circ)$$

Beispiel 2

Im folgenden Netzwerk ist nur der Strom $i_6(t)$ zu bestimmen. Hinweis: Bei Anwendung bestimmter Regeln ist der Aufwand relativ gering. Die Berechnung ohne Taschenrechner ist möglich, aber nicht zu empfehlen.

**Gegebene Daten des Netzwerks:**

$$u_{q1}(t) = 15 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 20^\circ) \quad u_{q2}(t) = 200 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 70^\circ) \quad u_{q8}(t) = 18 \text{ V} \cdot \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$i_{q3}(t) = 10 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t) \quad i_{q4}(t) = 10 \text{ mA} \cdot \sin(\omega t) \quad f = 10 \text{ kHz} / (2\pi)$$

Lösungsweg:

$$i_5(t) = i_{q3}(t) + i_{q4}(t) \quad \hat{i}_5 = \hat{i}_{q3} + \hat{i}_{q4}$$

$$\hat{i}_{q3} = 10 \text{ mA} / 0^\circ = 10 \text{ mA} + j0$$

$$\hat{i}_{q4} = 10 \text{ mA} / -90^\circ = 0 - j10 \text{ mA}$$

$$\hat{i}_{\tilde{5}} = 10 \text{ mA} - j10 \text{ mA} = \sqrt{2} * 10 \text{ mA} / -45^\circ = 14.14 \text{ mA} / -45^\circ$$

$$Y_6 = 1/R_6 = 1/(2 \text{ k}\Omega) = 0.5 \text{ mS}$$

$$Y_7 = j\omega * C_7 = j2\pi * \frac{10000}{2\pi} \text{ s}^{-1} * 50 * 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} = j0.5 \text{ mS}$$

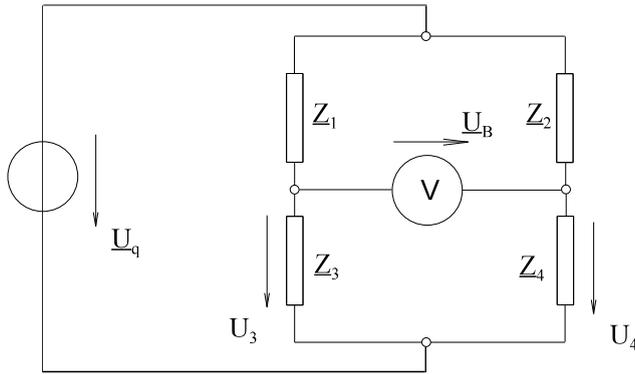
$$\hat{i}_6 = \frac{Y_6}{Y_6 + Y_7} * \hat{i}_{\tilde{5}} = \frac{0.5 \text{ mS}}{0.5 \text{ mS} + j0.5 \text{ mS}} * \hat{i}_{\tilde{5}} = \frac{0.5 \text{ mS} / 0^\circ}{\sqrt{2} * 0.5 \text{ mS} / 45^\circ} * 14.14 \text{ A} / -45^\circ = 10 \text{ mA} / -90^\circ$$

$$i_6(t) = 10 \text{ mA} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ)$$

6.6.3. Wechselstrombrücken

Anwendung: Bestimmung von realen Induktivitäten und Kapazitäten.

6.6.3.1. Komplexe Abgleichbedingung



Abgleichbedingung: $\underline{U}_B = 0$

$$\underline{U}_B = \underline{U}_3 - \underline{U}_4 = 0$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_4$$

$$\underline{U}_q \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} \underline{U}_q$$

$$\underline{Z}_3 * \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 * \underline{Z}_4 = \underline{Z}_4 * \underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 * \underline{Z}_3$$

Bild EG6631A

$$\underline{Z}_2 * \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 * \underline{Z}_4$$

Wie auch bei der Brücke mit ohmschen Widerständen muss im abgeglichenen Zustand das Produkt der diagonalen Elemente gleich sein. **Für die Wechselstrombrücke gilt: Das Produkt der diagonalen komplexen Widerstände muss im abgeglichenen Zustand gleich sein.**

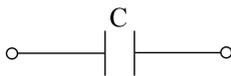
Die Abgleichbedingung gilt auch für den Kehrwert, den komplexen Leitwert:

$$\underline{Y}_2 * \underline{Y}_3 = \underline{Y}_1 * \underline{Y}_4$$

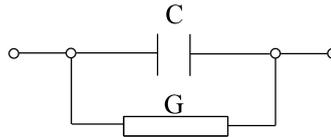
6.6.3.2. Messung einer realen Kapazität

Ein Kondensator besteht aus zwei Platten, zwischen denen ein Dielektrikum (Nichtleiter) angeordnet ist. (Kap.8 dieses Semesters). Einen idealen Nichtleiter gibt es nicht. Daher ergibt sich das Ersatzschaltbild eines realen Kondensators aus der Parallelschaltung eines idealen Kondensators und eines Leitwertes (Widerstand):

ideale Kapazität



reale Kapazität



$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\underline{Y}}$$

$$\underline{Y} = G + j\omega C$$

Eine Möglichkeit, reale Kapazitäten zu messen ist die Wechselstrombrücke. Eine symmetrischen Anordnung der Brückenelemente, zeigt Bild EG6632A

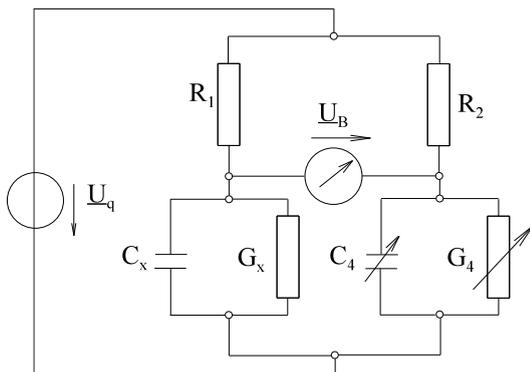


Bild EG6632A

Die Abgleichbedingung für die Brücke aus Bild EG6632A in Leitwertform lautet:

$$\underline{Y}_x * \frac{1}{R_2} = \underline{Y}_4 * \frac{1}{R_1}$$

$$\underline{Y}_x = \frac{R_2}{R_1} \underline{Y}_4$$

$$\underline{Y}_x = G_x + j\omega C_x \quad \underline{Y}_4 = G_4 + j\omega C_4$$

$$G_x + j\omega C_x = \frac{R_2}{R_1} G_4 + \frac{R_2}{R_1} j\omega C_4$$

Eine komplexe Zahl ist nur dann gleich, wenn die Realteile und die Imaginärteile gleich sind. Daraus ergeben sich zwei Abgleichbedingungen, aus denen die gesuchten Elemente bestimmt werden können:

$$G_x = \frac{R_2}{R_1} * G_4 \quad C_x = \frac{R_2}{R_1} * C_4 \quad R_x = \frac{R_1}{R_2} * R_4$$

Bei der oberen Brücke müssen G_4 und C_4 variiert werden. Obere Brücke ist eine Schaltungsvariante. Es gibt zwar Kapazitätsdekaden, aber ohmsche Widerstände zu verändern, ist einfacher. Es werden dann in zwei verschiedenen Zweigen ohmsche Widerstände variiert und ein fester Kondensator in einen bekannten Zweig geschaltet.

6.6.3.3. Messung einer realen Induktivität

Eine reale Spule besteht aus Kupferwindungen mit ohmschen Verlusten. Diese werden im ESB durch einen zusätzlichen Spannungsabfall, also einen ohmschen Reihenwiderstand berücksichtigt.

ideale Induktivität



$$\underline{Z} = j\omega L$$

reale Spule



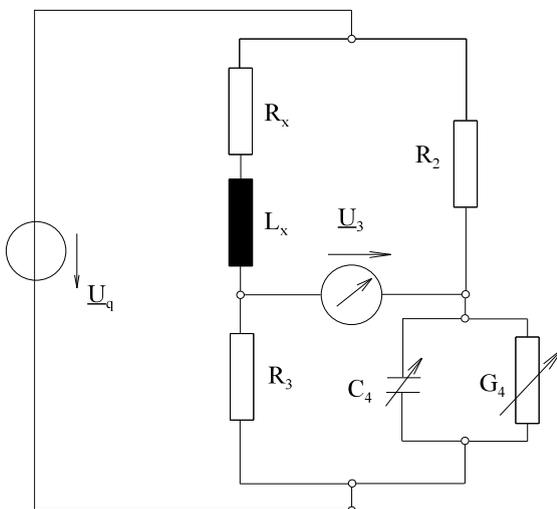
$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

Es gibt verschieden Möglichkeiten eine Brücke zur Messung der realen Spulenparameter R und L aufzubauen, die sich in drei Kategorien einteilen lassen,

- A] L und R im Nachbarzweig variieren
- B] R und C im Diagonalzweig variieren
- C] zwei R variieren, ein festes C
- D] zwei R variieren, ein festes L

Variable Induktivitäten bei Methode A sind sehr schwer zu kalibrieren. Die Methode B oder C sind zu bevorzugen.

Beispiel zu Methode B:



$$\underline{Z}_x * \frac{1}{\underline{Y}_4} = R_2 * R_3$$

$$\underline{Z}_x = \underline{Y}_4 * R_2 * R_3$$

$$\underline{Z}_x = R_x + j\omega L_x$$

$$\underline{Y}_4 = G_4 + j\omega C_4$$

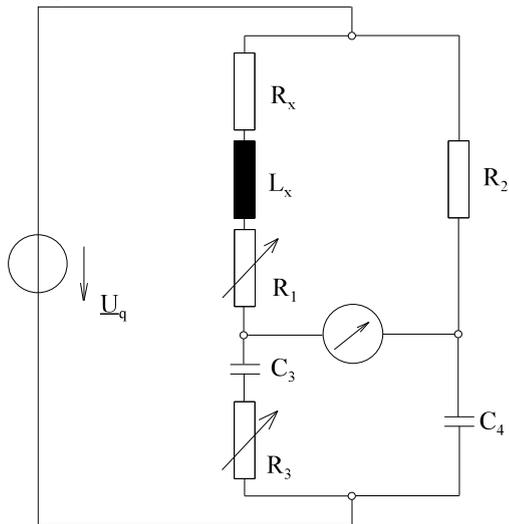
$$R_x + j\omega L_x = R_2 * R_3 * (G_4 + j\omega C_4) = R_2 * R_3 * G_4 + R_2 * R_3 * j\omega C_4$$

$$R_x = R_2 * R_3 * G_4$$

$$L_x = R_2 * R_3 * C_4$$

Bild EG6633A

Beispiel zu Methode C:



$$Z_1 * \frac{1}{Y_4} = R_2 * Z_3 \quad Z_1 = R_x + j\omega L_x + R_1$$

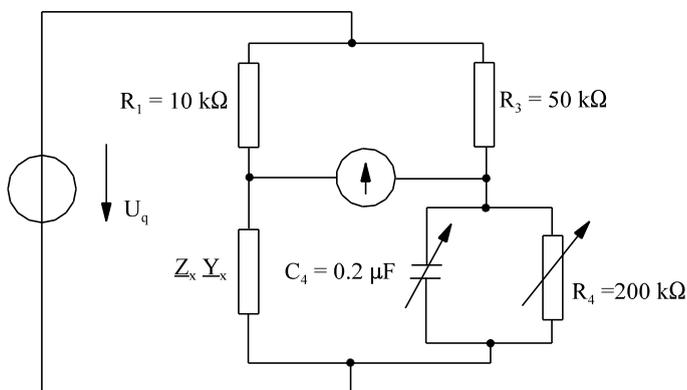
$$(R_x + R_1 + j\omega L_x) \frac{1}{j\omega C_4} = R_2 \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right)$$

$$R_x + R_1 + j\omega L_x = R_2 * R_3 * j\omega C_4 + R_2 \frac{C_4}{C_3}$$

$$R_x = R_2 \frac{C_4}{C_3} - R_1 \quad L_x = R_2 * R_3 * C_4$$

Bild EG6633B

Beispiel 1



Die dargestellte Brücke ist abgeglichen. Bestimmen Sie das Ersatzschaltbild (ESB) und die Daten des realen Zweipols. Die Art des Zweipols ist anzugeben.

Lösungsweg:

weil $R_4 \parallel C_4$ wird Leitwertform gewählt:

$$Y_1 * Y_4 = Y_3 * Y_x$$

$$\frac{1}{R_1} * \left(\frac{1}{R_4} + j\omega * C_4 \right) = \frac{1}{R_3} * (G_x + jB_x)$$

$$\frac{1}{R_1 * R_4} + j \frac{\omega * C_4}{R_1} = \frac{G_x}{R_3} + \frac{B_x}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_1 * R_4} = \frac{G_x}{R_3}$$

$$\frac{\omega * C_4}{R_1} = \frac{B_x}{R_3}$$

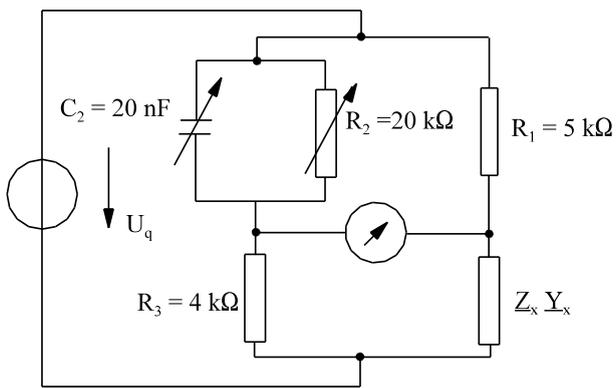
$$R_x = \frac{1}{G_x} = \frac{R_1 * R_4}{R_3} = \frac{10k\Omega * 200k\Omega}{50k\Omega} = 40k\Omega$$

$$B_x = \frac{R_3}{R_1} * \omega * C_4$$

Da B_x positiv, folgt daraus eine Kapazität:

$$B_x = \omega * C_x = \frac{R_3}{R_1} * \omega * C_4$$

$$C_x = \frac{R_3}{R_1} * C_4 = \frac{50k\Omega}{10k\Omega} * 0.2\mu F = 1\mu F$$

Beispiel 2

Die dargestellte Brücke ist abgeglichen. Bestimmen Sie das Ersatzschaltbild (ESB) und die Daten des realen Zweipols.

Lösungsweg:

weil $C_2 \parallel R_2$ wird Leitwertform gewählt:

$$\underline{Y}_1 * \underline{Y}_3 = \underline{Y}_x * \underline{Y}_2$$

$$\frac{1}{R_1 * R_3} = \underline{Y}_x * \left(\frac{1}{R_2} + j\omega * C_2 \right)$$

$$\frac{1}{\underline{Y}_x} = \left(\frac{1}{R_2} + j\omega * C_2 \right) * R_1 * R_3$$

$$\underline{Z}_x = \frac{R_1 * R_3}{R_2} + j\omega * C_2 * R_1 * R_3 = R_x + jX_x$$

$$R_x = \frac{R_1 * R_3}{R_2} = \frac{5k\Omega * 4k\Omega}{20k\Omega} = 1k\Omega$$

$$X_x = \omega * C_2 * R_1 * R_3$$

Da X_x positiv, folgt daraus eine Induktivität:

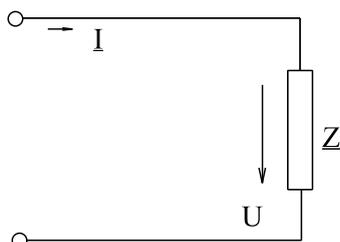
$$X_x = \omega * L_x = \omega * C_2 * R_1 * R_3$$

$$L_x = R_1 * R_3 * C_2 = 5000 \frac{V}{A} * 4000 \frac{V}{A} * 20 * 10^{-9} \frac{As}{V} = 0.4 \frac{Vs}{A} = 0.4 H$$

6.6.4. Blindstromkompensation

Die meisten Verbraucher in der Energietechnik sind induktiver Art. Elektrische Maschinen haben Spulen und somit Induktivitäten, Leuchtstofflampen arbeiten mit induktiven Vorschaltgeräten und bei Großverbrauchern wirken die Zuleitungen als Induktivitäten. Die dabei auftretende positive Blindleistung erzeugt höhere Ströme, die bei Großabnehmern extra bezahlt werden müssen. Die Abhilfe wäre, eine negative Blindleistung zu addieren. Ist es möglich negative Blindleistung zu verbrauchen? Wie müßte der Verbraucher gewählt werden? Antwort: Kondensatoren verursachen negative Blindleistung.

Ein unkompensierter induktiver Verbraucher



$$\underline{Z} = Z * e^{j\varphi}$$

Bild EG664A

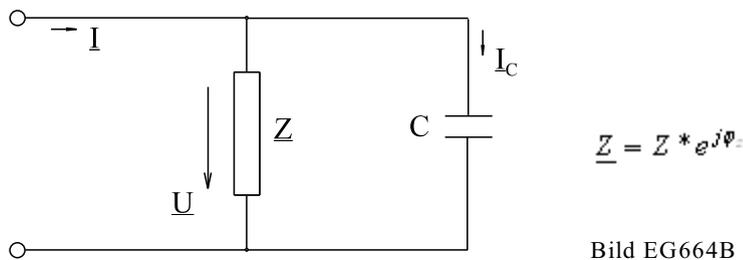
hat die Leistungskomponenten

$$\underline{S} = \underline{U} * \underline{I}^* = \underline{U} * \frac{\underline{U}^*}{\underline{Z}^*} = \frac{U^2}{Z * e^{j\varphi}} = \frac{U^2}{Z} * e^{j\varphi}$$

$$\underline{S} = \frac{U^2}{Z} [\cos(\varphi_z) + j\sin(\varphi_z)] = P + jQ$$

$$P = \frac{U^2}{Z} \cos(\varphi_z) \qquad Q = \frac{U^2}{Z} \sin(\varphi_z)$$

Durch die Parallelschaltung eines Kondensators



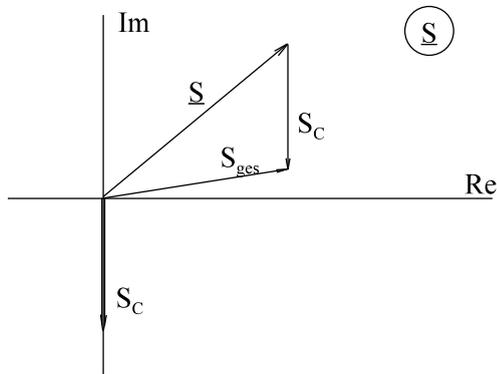
ergibt sich eine zusätzliche negative Blindleistungskomponente

$$\underline{S}_{ges} = \underline{S}_Z + \underline{S}_C$$

$$\underline{S}_C = \underline{U}_C * \underline{I}_C^* = \underline{U} * (\underline{U} * j\omega C)^* = -jU^2 * \omega C$$

$$\underline{S}_{ges} = \frac{U^2}{Z} \cos(\varphi) + j \left[\frac{U^2}{Z} \sin(\varphi) - U^2 * \omega C \right]$$

Durch den negativen Anteil $-U^2\omega C$ wird die Blindleistung verringert. Grafisch verdeutlicht dieses die geometrische Addition des Bildes EG664C.



Falls der Phasenwinkel der Spannung U gleich Null ist, sehen die komplexen Zeiger (bei anderem Maßstab) für die Ströme gleich aus. Ströme und Leistungen überlagern sich. In der Praxis wird nicht zu 100 % kompensiert, meist bleibt ein kleiner induktiver Anteil erhalten.

Bild EG664C

Es gibt zwei Arten der Kompensation. Bei der **statischen Blindstromkompensation** wird wie bei Bild EG664B, ein Kondensator stationär zum Verbraucher parallel geschaltet. Bei der **dynamischen Blindstromkompensation** wird ein Kondensator stationär parallel geschaltet, siehe Bild EG664D:

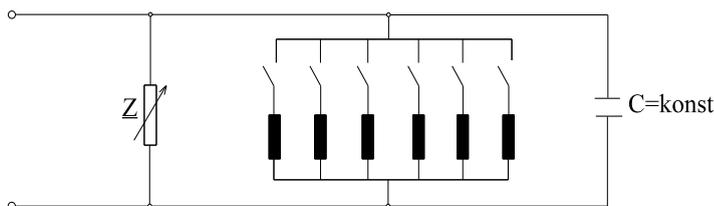
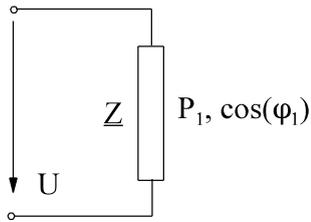


Bild EG664D

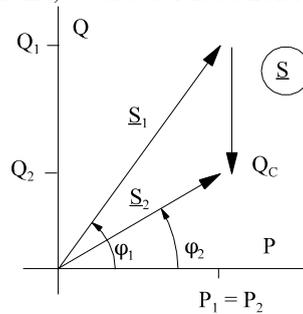
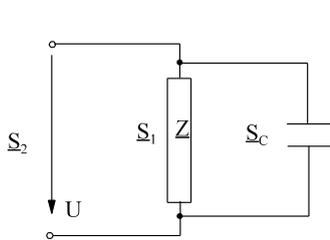
Zur Kompensation der veränderlichen Blindleistung werden zusätzliche Induktivitäten parallel geschaltet. Diese werden in Abhängigkeit der Blindleistung von \underline{Z} zugeschaltet. Dadurch wird die negative Blindleistung von C teilweise wieder aufgehoben. Im dritten Semester (Einschaltvorgänge, Kap. 10) wird aufgezeigt, dass Induktivitäten sich leichter Einschalten lassen als Kapazitäten.

Bei einem ohmsch-induktiven Verbraucher mit den gegebenen Daten



U - Anschlussspannung
 P_1 - Wirkleistung und
 $\cos(\varphi_1)$ - Leistungsfaktor

soll eine Blindstromkompensation durchgeführt, so dass der neue Leistungsfaktor $\cos(\varphi_2)$ erreicht wird.



Die Schaltung und das Zeigerdiagramm der komplexen Leistung ist oben dargestellt. Der Realteil der komplexen Leistung bleibt gleich, daher gilt

$$P_1 = P_2$$

Aus oberen Bild ist ablesbar:

$$\tan(\varphi_1) = \frac{Q_1}{P_1} \Rightarrow Q_1 = P_1 \cdot \tan(\varphi_1)$$

$$Q_2 = Q_1 + Q_C = P_1 \cdot \tan(\varphi_1) - \omega \cdot U^2 \cdot C$$

$$\tan(\varphi_2) = \frac{Q_2}{P_1} = \frac{P_1 \cdot \tan(\varphi_1) - \omega \cdot U^2 \cdot C}{P_1} = \tan(\varphi_1) - \frac{\omega \cdot U^2 \cdot C}{P_1}$$

$$C = \left[\tan(\varphi_1) - \tan(\varphi_2) \right] \cdot \frac{P_1}{\omega \cdot U^2}$$

Hinweis:
$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\varphi)}}{\cos(\varphi)} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\varphi)} - 1}$$

Beispiel 1

Ein Motor nimmt an 230 V/50 Hz Wechselspannung eine Wirkleistung von 2 kW und eine Blindleistung von 1.2 kvar induktiv auf. Wie groß ist eine parallele Kapazität zu wählen, damit eine resultierende Blindleistung von 100 var auftritt.

Lösungsweg:

gegeben: U = 230 V f = 50 Hz
 Q = 1.2 kvar Q_{res} = 100 var
gesucht: C

$$\Delta Q = 100 \text{ var} - 1200 \text{ var} = -1100 \text{ var}$$

$$\Delta Q = -\omega \cdot C \cdot U^2$$

$$C = -\frac{\Delta Q}{\omega \cdot U^2} = -\frac{-1100 \text{ VA}}{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot (230 \text{ V})^2} = 66.2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 66.2 \mu\text{F}$$

Beispiel 2

Eine Leuchtstofflampe ($U = 230 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$) mit einer Gesamtwirkleistungsaufnahme $P = 60 \text{ W}$ und einem $\cos(\varphi_1) = 0.6$ induktiv soll durch Parallelschaltung eines Kondensators einen $\cos(\varphi_2) = 0.95$ induktiv bekommen. Wie groß ist der Kondensator C zu wählen. Wie groß sind Wirk-, Blind- und Scheinleistung vor der Kompensation (Index 1) und nach der Kompensation (Index 2).

Lösungsweg:

gegeben: $U = 230 \text{ V}$ $f = 50 \text{ Hz}$ $P = 60 \text{ W}$

$\cos(\varphi_1) = 0.6$ $\cos(\varphi_2) = 0.95$

gesucht: C P_1, Q_1, S_1 P_2, Q_2, S_2

$$P_1 = S_1 \cdot \cos(\varphi_1) \Rightarrow S_1 = \frac{P_1}{\cos(\varphi_1)} = \frac{60 \text{ W}}{0.6} = 100 \text{ VA}$$

$$P_1 = P_2 = 60 \text{ W}$$

$$Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = \sqrt{(100 \text{ VA})^2 - (60 \text{ VA})^2} = 80 \text{ var}$$

$$S_2 = \frac{P_2}{\cos(\varphi_2)} = \frac{60 \text{ W}}{0.95} = 63.16 \text{ VA}$$

$$Q_2 = \sqrt{S_2^2 - P_2^2} = \sqrt{(63.16 \text{ VA})^2 - (60 \text{ VA})^2} = 19.73 \text{ var}$$

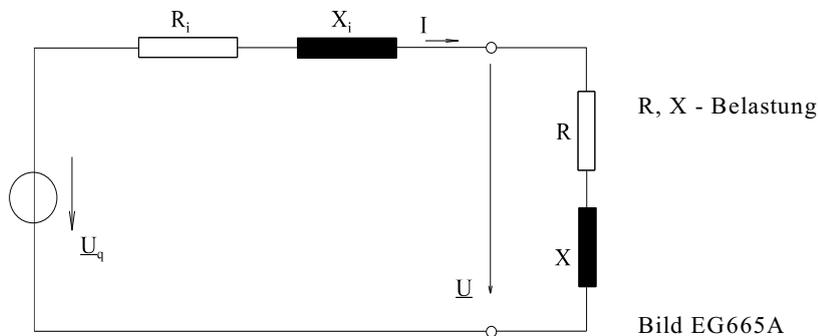
$$Q_2 = Q_1 + Q_C \quad Q_C = Q_2 - Q_1 = 19.73 \text{ var} - 80 \text{ var} = -60.27 \text{ var}$$

$$Q_C = -\omega \cdot u^2 \cdot C \Rightarrow C = -\frac{Q_C}{\omega \cdot U^2} = -\frac{-60.27 \text{ VA}}{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot (230 \text{ V})^2} = 3.63 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 3.63 \mu\text{F}$$

Auch Lösung mit Formel möglich.

6.6.5. Leistungsanpassung

Das Problem der Leistungsanpassung ist auch schon vom Gleichstromkreis aus dem 1. Semester her bekannt (Kap. 4.5.3). Dort wurde eine Wirkleistungsanpassung vorgenommen. Jede reale Quelle hat einen komplexen Innenwiderstand mit Wirk- und Blindanteil. Bild EG665A zeigt eine Quelle mit Belastung.



Die abgegebene Leistung an der Last

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

soll für die Anordnung nach Bild EG665A berechnet werden:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{(R_i + R) + j(X_i + X)}$$

$$\underline{I}^* = \frac{\underline{U}_q^*}{(R_i + R) - j(X_i + X)}$$

$$\underline{U} = (R + jX) \cdot \underline{I} = \underline{U}_q \frac{R + jX}{(R_i + R) + j(X_i + X)}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U}_q \frac{R + jX}{(R_i + R) + j(X_i + X)} * \frac{\underline{U}_q^*}{(R_i + R) - j(X_i + X)} \quad \underline{U}_q * \underline{U}_q^* = U_q^2$$

$$\underline{S} = \frac{R + jX}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} U_q^2$$

$$\underline{S} = U_q^2 \frac{R}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} + jU_q^2 \frac{X}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2}$$

Der Vergleich mit $S = P + jQ$

liefert:

$$P = U_q^2 \frac{R}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} \quad Q = U_q^2 \frac{X}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2}$$

6.6.5.1. Wirkleistungsanpassung

Die Wirkleistung P soll angepasst werden in Bezug auf die Parameter R und X . Es liegt ein Optimierungsproblem mit zwei Variablen vor.

Vorgehensweise:

- A] Notwendige Bedingung: partielle Ableitungen gleich Null setzen
 B] Mit den Werten unter A die hinreichenden Bedingungen überprüfen

A] Die partiellen Ableitungen nach X und R werden gebildet und gleich Null gesetzt

$$P_X = \frac{\partial P}{\partial X} = U_q^2 * R \frac{2(X_i + X)}{[(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2]^2} = 0$$

$$\Rightarrow X_i + X = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -X_i$$

$$P_R = \frac{\partial P}{\partial R} = U_q^2 \frac{(R + R_i)^2 + (X_i + X)^2 - R * 2(R + R_i)}{[(R + R_i)^2 + (X_i + X)^2]^2} = 0$$

$$\Rightarrow R^2 + 2R_i * R + R_i^2 - 2R^2 - 2R * R_i = 0$$

$$\Rightarrow -R^2 + R_i^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \pm R_i$$

Die Lösungen aufgrund der notwendigen Bedingungen $X = -X_i$ und $R = \pm R_i$ müssen noch mit den hinreichenden Bedingung überprüft werden. Dazu müssten die zweiten partielle Ableitungen gebildet werden.

Auf diese mathematische Herleitung des Beweises

$$\det 1 = P_{RR}(R = R_i, X = -X_i) < 0$$

$$\det 2 = \begin{vmatrix} P_{RR}(R = R_i, X = -X_i) & P_{RX}(R = R_i, X = -X_i) \\ P_{XR}(R = R_i, X = -X_i) & P_{XX}(R = R_i, X = -X_i) \end{vmatrix} > 0$$

soll hier aus Gründen des Aufwandes verzichtet werden.

Schneller ist die physikalische Erklärung zu erläutern. Es gilt:

$$\begin{array}{lll} X = -X_i, R = 0 & \Rightarrow & P = 0 \\ X = -X_i, R > 0 & \Rightarrow & P > 0 \\ X = -X_i, R \rightarrow \infty & \Rightarrow & P \rightarrow \infty \end{array}$$

zwischen den Werten $R = 0$ und $R = \infty$ ist ein Maximum vorhanden. Die Lösung $R_i = -R_i$ und $X = -X_i$ führt auf den technisch nicht möglichen Fall eines unendlichen Stroms. Diese Lösung scheidet somit aus.

Damit ergeben die Werte

$$X = -X_i \quad R = R_i \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum der Wirkleistung}$$

Das Maximum der Wirkleistung tritt bei gleichen ohmschen Widerstand als der Innenwiderstand auf, der Blindanteil muss negativ dem der Quelle gewählt werden.

6.6.5.2. Scheinleistungsanpassung

Der Betrag der Scheinleistung soll maximiert werden. Einfacher ist, daß Quadrat des Betrages zu maximieren:

$$S^2 = S^* S^* = \frac{R^2 + X^2}{\left[(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2 \right]^2} U_q^4$$

Anwendung des gleichen Schemas als in Kap. 6.6.5.1 liefert als Ergebnis

$$R = R_i \quad X = X_i \quad \Rightarrow \quad S - \text{MAX}$$

Scheinleistungsanpassung bedeutet, der Verbraucher sollte den gleichen komplexen Widerstand aufweisen, als den der Spannungsquelle.

Eine Anwendung der Scheinleistungsanpassung in der Nachrichtentechnik ist der Abschluss mit Wellenwiderstand.

6.6.5.3. Leistungsanpassung an einem ohmschen Widerstand

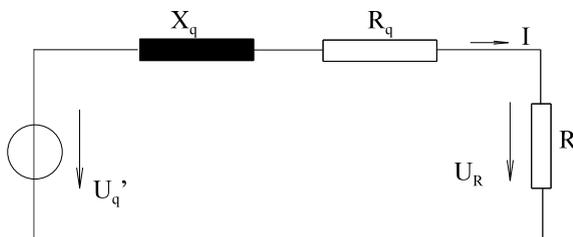


Bild EG6653A

Problem: Wirkleistungsmaximierung an R

$$I = \frac{U_q'}{\sqrt{X_q^2 + (R_q + R)^2}}$$

$$U_R = I \cdot R = \frac{R}{\sqrt{X_q^2 + (R_q + R)^2}} U_q'$$

$$P = I \cdot U_R = U_q'^2 \frac{R}{X_q^2 + (R_q + R)^2}$$

$$\frac{dP}{dR} = U_q'^2 \frac{\left[X_q^2 + (R_q + R)^2 \right] \cdot 1 - R \cdot 2(R_q + R) \cdot 1}{\left[X_q^2 + (R_q + R)^2 \right]^2}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_q^2 + R_q^2 + 2RR_q + R^2 - 2R_qR - 2R^2 = 0$$

$$X_q^2 + R_q^2 = R^2 \quad R = \sqrt{X_q^2 + R_q^2}$$

Ein Problem (hauptsächlich der Elektrowärme) ist, bei einem größtenteils induktiven Innenwiderstand (Zuleitung, Trafo) die Wirkleistung an einem ohmschen Widerstand R nach Bild EG6653A zu optimieren.

Beispiel 1

Eine Spannungsquelle $\underline{U}_q = 20 \text{ V} / 0^\circ$ mit dem Innenwiderstand $\underline{Z}_i = (4 + j3) \text{ k}\Omega$ wird mit dem Widerstand $\underline{Z} = R + jX$ belastet. Wie groß müssen R und X gewählt werden damit

- die Wirkleistung P maximal wird und
- die Scheinleistung S ein Maximum hat.
- Wie groß ist P_{\max} für a).
- Berechnen Sie S_{\max} für b).

Lösungsweg:

- a) die Wirkleistung P maximal wird

$$\underline{Z} = \underline{Z}_i^* = 4 \text{ k}\Omega - j3 \text{ k}\Omega \quad R = 4 \text{ k}\Omega \quad X = -3 \text{ k}\Omega$$

- b) die Scheinleistung S ein Maximum hat.

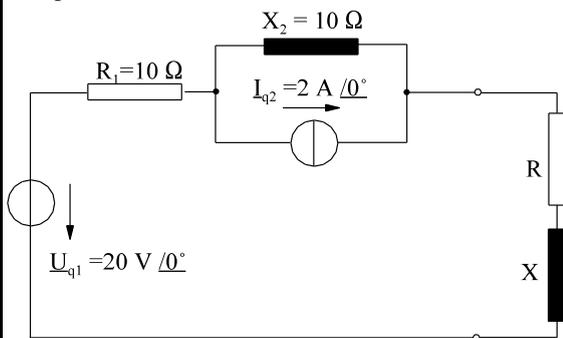
$$\underline{Z} = \underline{Z}_i = 4 \text{ k}\Omega + j3 \text{ k}\Omega \quad R = 4 \text{ k}\Omega \quad X = 3 \text{ k}\Omega$$

- c) Wie groß ist P_{\max} für a).

$$P_{\max} = \frac{U_q^2}{4 * R} = \frac{(20 \text{ V})^2}{4 * 4 \text{ k}\Omega} = 25 \text{ mW}$$

- d) Berechnen Sie S_{\max} für b).

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(4 \text{ k}\Omega)^2 + (3 \text{ k}\Omega)^2} = 5 \text{ k}\Omega \quad S_{\max} = \frac{U_q^2}{4 * Z} = \frac{(20 \text{ V})^2}{4 * 5 \text{ k}\Omega} = 20 \text{ kVA}$$

Beispiel 2

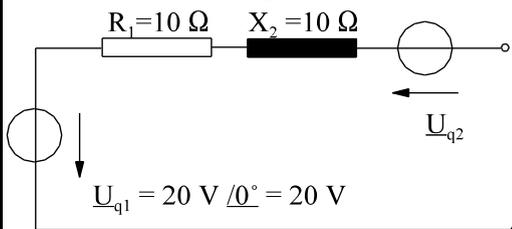
Bei dem dargestellten Netzwerk sind die Werte von R und X zu bestimmen unter der Bedingung

- maximale Scheinleistung an Z
- maximale Wirkleistung an R

Die Wirk- und Blindleistung sind jeweils anzugeben.

Lösungsweg:

Bestimmung der Ersatzquelle:



$$U_{q2} = j10 \Omega * 2 \text{ A} / 0^\circ = j20 \text{ V}$$

$$\underline{Z}_q = R_1 + j X_2 = 10 \Omega + j10 \Omega = 14.14 / 45^\circ$$

$$\underline{U}_q = \underline{U}_{q1} + \underline{U}_{q2} = 20 \text{ V} + j20 \text{ V} = 28.28 \text{ V} / 45^\circ$$

- a) maximale Scheinleistung an Z

$$\underline{Z} = \underline{Z}_q = 10 \Omega + j 10 \Omega \quad \Rightarrow \quad R = 10 \Omega \quad X = 10 \Omega$$

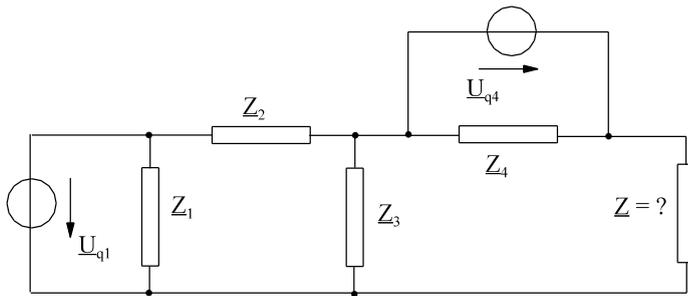
$$S = \frac{U_q^2}{4 * \underline{Z}} = \frac{(28.28 \text{ V})^2}{4 * (14.14 / 45^\circ)} = 14.14 \text{ VA} / 45^\circ = (10 + j10) \text{ VA} \quad P = 10 \text{ W} \quad Q = 10 \text{ var}$$

- b) maximale Wirkleistung an R

$$\underline{Z} = \underline{Z}_q^* = 10 \Omega - j10 \Omega \quad \Rightarrow \quad R = 10 \Omega \quad X = -10 \Omega$$

$$U_R = \frac{28.28 \text{ V}}{2} = 14.14 \text{ V} \quad P_{\max} = \frac{(14.14 \text{ V})^2}{10 \Omega} = 20 \text{ W}$$

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{14.14 \text{ V}}{10 \Omega} = 1.41 \text{ A} \quad Q = I^2 * X = (1.41 \text{ A})^2 * (-10 \Omega) = -20 \text{ var}$$

Beispiel 3

Gegebene Daten des Netzwerkes:

$$\underline{Z}_1 = (6 + j8) \Omega \quad \underline{U}_{q1} = 25 \text{ V}/0^\circ$$

$$\underline{Z}_2 = (10 + j5) \Omega$$

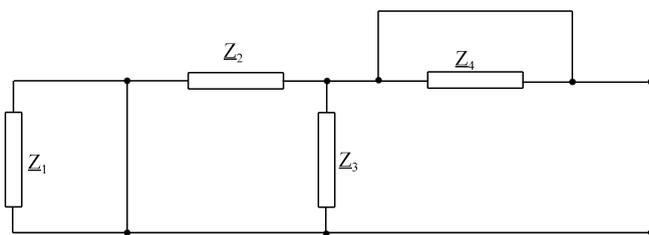
$$\underline{Z}_3 = (2.5 - j5) \Omega$$

$$\underline{Z}_4 = (8 + j6) \Omega$$

$$\underline{U}_{q4} = 5 \text{ V}/0^\circ$$

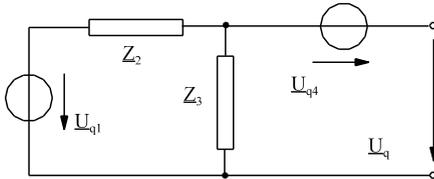
a) Bestimmen Sie \underline{Z} , damit die Scheinleistung an \underline{Z} maximal wird. Berechnen Sie Wirk- und Blindleistung an \underline{Z} .

b) Bestimmen Sie \underline{Z} , damit die Wirkleistung an \underline{Z} maximal wird. Berechnen Sie Wirk- und Blindleistung an \underline{Z} .

Lösungsweg:Methode Ersatzquelle ESB für \underline{Z}_q :

$$\underline{Z}_q = \underline{Z}_2 \parallel \underline{Z}_3$$

$$\underline{Z}_q = \frac{1}{\frac{1}{10 + j5} + \frac{1}{2.5 - j5}} \Omega = (4 - j3) \Omega$$

Methode Ersatzquelle ESB für \underline{U}_q :

$$\underline{U}_q = -\underline{U}_{q4} + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} * \underline{U}_{q1} = -5 \text{ V}/0^\circ + \frac{(2.5 - j5) \Omega}{(10 + j5) \Omega + (2.5 - j5) \Omega} * 25 \text{ V}/0^\circ$$

$$\underline{U}_q = -j10 \text{ V} = 10 \text{ V} / -90^\circ$$

a) Bestimmen Sie \underline{Z} , damit die Scheinleistung an \underline{Z} maximal wird. Berechnen Sie Wirk- und Blindleistung an \underline{Z} .

$$\underline{Z} = \underline{Z}_q = (4 - j3) \Omega$$

$$\underline{S}_{\max} = \frac{1}{4} * \underline{U}_q^2 * \underline{Y}_q^* = \frac{1}{4} * (10 \text{ V})^2 * \left(\frac{1}{(4 - j3) \Omega} \right)^* = (4 - j3) \text{ VA}$$

$$P = 4 \text{ W}$$

$$Q = -3 \text{ var}$$

b) Bestimmen Sie \underline{Z} , damit die Wirkleistung an \underline{Z} maximal wird. Berechnen Sie Wirk- und Blindleistung an \underline{Z} .

$$\underline{Z} = \underline{Z}_q^* = (4 \Omega - j3 \Omega)^* = (4 + j3) \Omega$$

$$I = \frac{U_q}{2 * \text{Re}(\underline{Z})} = \frac{10 \text{ V}}{2 * 4 \text{ V/A}} = 1.25 \text{ A}$$

$$P = I^2 * \text{Re}(\underline{Z}) = (1.25 \text{ A})^2 * 4 \text{ V/A} = 6.25 \text{ W}$$

$$Q = I^2 * \text{Im}(\underline{Z}) = (1.25 \text{ A})^2 * 3 \text{ V/A} = 4.69 \text{ var}$$

6.6.6. Umwandlung Reihenschaltung \Leftrightarrow Parallelschaltung

In manchen Fällen ist es vorteilhaft, eine Reihenschaltung in eine Parallelschaltung umzuwandeln und umgekehrt.

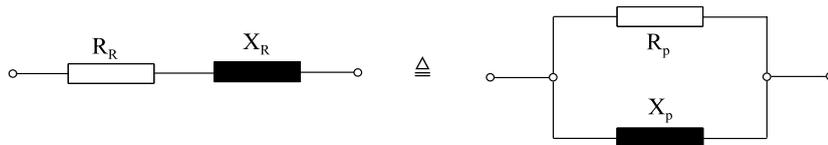


Bild EG666A

Blindwiderstände sind frequenzabhängig. Die Umwandlung der oberen Schaltung kann nur für eine bestimmte Frequenz durchgeführt werden. Die Bedingung der Umwandlung lautet: Beide Schaltungen sollen nach außen das gleiche Verhalten aufweisen. An den Klemmen muss der gleiche komplexe Widerstand vorhanden sein:

$$\underline{Z}_R = \underline{Z}_P$$

$$R_R + jX_R = \frac{jX_P \cdot R_P}{R_P + jX_P} \cdot \frac{R_P - jX_P}{R_P - jX_P}$$

$$R_R + jX_R = \frac{R_P \cdot X_P^2}{R_P^2 + X_P^2} + j \frac{R_P^2 \cdot X_P}{R_P^2 + X_P^2}$$

$R_R = R_P \cdot \frac{X_P^2}{R_P^2 + X_P^2}$	$X_R = X_P \cdot \frac{R_P^2}{R_P^2 + X_P^2}$
---	---

Zur Bestimmung von R_P und X_P werden besser die komplexen Leitwerte gleich gesetzt:

$$\underline{Y}_R = \underline{Y}_P$$

$$\frac{1}{R_R + jX_R} = \frac{1}{R_P} + \frac{1}{jX_P}$$

$$\frac{1}{R_P} - j \frac{1}{X_P} = \frac{1}{R_R + jX_R} \cdot \frac{R_R - jX_R}{R_R - jX_R} = \frac{R_R}{R_R^2 + X_R^2} - \frac{jX_R}{R_R^2 + X_R^2}$$

$R_P = \frac{R_R^2 + X_R^2}{R_R}$	$X_P = \frac{R_R^2 + X_R^2}{X_R}$
-----------------------------------	-----------------------------------

Beispiel 1

Wandeln Sie die Reihenschaltung $\underline{Z}_R = R_R + jX_R$ in eine äquivalente Parallelschaltung mit R_P und X_P um. Unter welcher Bedingung ist diese Umformung zulässig?

$$\underline{Z}_R = (4 + j2) \text{ k}\Omega$$

Lösungsweg:

Erste Lösungsmöglichkeit Formel:

$$R_P = \frac{R_R^2 + X_R^2}{R_R} \qquad X_P = \frac{R_R^2 + X_R^2}{X_R}$$

$$R_R = 4 \text{ k}\Omega$$

$$X_R = 2 \text{ k}\Omega$$

$$R_R^2 + X_R^2 = (4 \text{ k}\Omega)^2 + (2 \text{ k}\Omega)^2 = 20 \cdot 10^6 \Omega^2$$

$$R_P = \frac{20 \cdot 10^6 \Omega^2}{4 \text{ k}\Omega} = 5 \text{ k}\Omega$$

$$X_P = \frac{20 \cdot 10^6 \Omega^2}{2 \text{ k}\Omega} = 10 \text{ k}\Omega$$

Zweite Lösungsmöglichkeit: komplexe Rechnung

$$\underline{Z}_R = (4 + j2) \text{ k}\Omega$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{4 \text{ k}\Omega + j2 \text{ k}\Omega} = 0.2 \text{ mS} - j0.1 \text{ mS} = G + jB = \frac{1}{\frac{1}{0.2 \text{ mS}}} - j \frac{1}{\frac{1}{0.1 \text{ mS}}} = \frac{1}{5 \text{ k}\Omega} - j \frac{1}{10 \text{ k}\Omega} = \frac{1}{R_P} - j \frac{1}{X_P}$$

$$R_P = 5 \text{ k}\Omega$$

$$X_P = 10 \text{ k}\Omega$$

Die Umformung gilt nur für eine bestimmte Frequenz.

Beispiel 2
Wandeln Sie die Parallelschaltung R_p und X_p in eine äquivalente Reihenschaltung mit $\underline{Z}_R = R_R + jX_R$ um. Unter welcher Bedingung ist diese Umformung zulässig?

$R_p = 4 \text{ k}\Omega$ ----- $X_p = 3 \text{ k}\Omega$

Lösungsweg: Erste Lösungsmöglichkeit Formel:

$$R_R = R_p * \frac{X_p^2}{R_p^2 + X_p^2} \qquad X_R = X_p * \frac{R_p^2}{R_p^2 + X_p^2}$$

$$R_p^2 + X_p^2 = (4 \text{ k}\Omega)^2 + (3 \text{ k}\Omega)^2 = 25(\text{k}\Omega)^2$$

$$R_R = 4 \text{ k}\Omega * \frac{(3 \text{ k}\Omega)^2}{25(\text{k}\Omega)^2} = 1.44 \text{ k}\Omega \qquad X_R = 3 \text{ k}\Omega * \frac{(4 \text{ k}\Omega)^2}{25(\text{k}\Omega)^2} = 1.92 \text{ k}\Omega$$

Zweite Lösungsmöglichkeit: komplexe Rechnung:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{X_p} = \frac{1}{4 \text{ k}\Omega} - j \frac{1}{3 \text{ k}\Omega}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{4 \text{ k}\Omega} - j \frac{1}{3 \text{ k}\Omega}} = 1.44 \text{ k}\Omega + j1.92 \text{ k}\Omega = R_R + jX_R$$

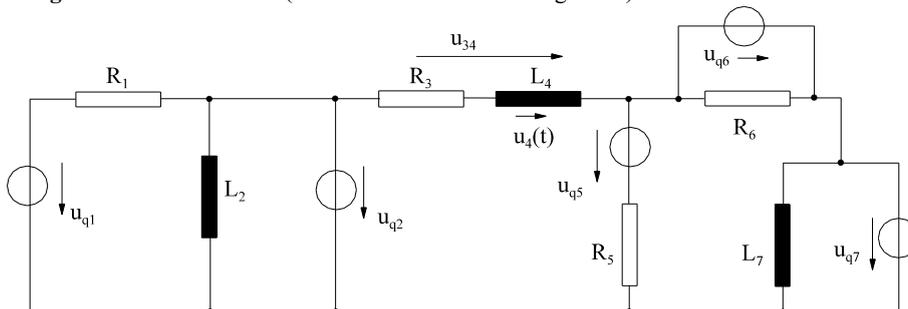
$R_R = 1.44 \text{ k}\Omega$ $X_R = 1.92 \text{ k}\Omega$

Die Umformung gilt nur für eine bestimmte Frequenz.

6.6.7. Fragen und Aufgaben zu Kap. 6.6

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.6.6.A	Zwei Spannungen sind gleich, wenn: * die Beträge gleich sind * die Winkel gleich sind * sowohl die Beträge als auch die Winkel gleich sind	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.6.B	Eine Wechselstrombrücke ist abgeglichen, wenn * der Betrag der Brückenspannung Null wird. * der Winkel der Brückenspannung Null wird.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.6.C	Zum Abgleich einer Wechselstrombrücke muss verstellt werden: * mindestens ein Element * mindestens zwei Elemente * mindestens drei Elemente	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.6.D	Eine Wechselstrombrücke * ist auf jeden Fall abgleichbar * ist nicht in jeden Fall abgleichbar	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.6.E	Bei einer Wechselstrombrücke mit R, R, R+L und R/C sollten die Elemente R+L und R/C * im Nachbarzweig angeordnet werden * diagonal angeordnet werden	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.6.F	Bei einer Wechselstrombrücke mit R, R, R/C und R/C sollten die Elemente R/C und R/C * im Nachbarzweig angeordnet werden * diagonal angeordnet werden	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.6.G	Blindstromkompensationen werden durchgeführt, weil * damit die Ströme auf den Zuleitungen geringer werden. * damit die Verluste auf den Zuleitungen geringer werden. * damit die Verluste in den Transformation geringer werden. * damit der Brennstoffeinsatz im Kraftwert erheblich reduziert wird.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.6.H	In der Regel wird bei Blindstromkompensationen * induktive Blindleistung des Verbrauchers durch kapazitive Blindleistung der Kompensationseinrichtung kompensiert. * induktive Blindleistung des Verbrauchers durch induktive Blindleistung der Kompensationseinrichtung kompensiert. * kapazitive Blindleistung des Verbrauchers durch induktive Blindleistung der Kompensationseinrichtung kompensiert. * kapazitive Blindleistung des Verbrauchers durch kapazitive Blindleistung der Kompensationseinrichtung kompensiert.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.6.6.I	Bei einer Spannungsquelle mit dem komplexen Innenwiderstand \underline{Z} bedeutet Scheinleistungsanpassung Abschluss mit * dem gleichen komplexen Widerstand \underline{Z} * dem konjugiert komplexen Widerstand \underline{Z}^*	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.6.J	Bei einer Spannungsquelle mit dem komplexen Innenwiderstand \underline{Z} bedeutet Wirkleistungsanpassung Abschluss mit * dem gleichen komplexen Widerstand \underline{Z} * dem konjugiert komplexen Widerstand \underline{Z}^*	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.6.K	Die Umformung von Wechselstromwiderständen einer Reihenschaltung in eine Parallelschaltung und umgekehrt gilt * für alle Frequenzen * nur für eine speziell ausgewählte Frequenz * nur für tiefe Frequenzen * nur für hohe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 6.6.1.A (Klausur 06.07.2000 Aufgabe 2)

Im dargestellten Netzwerk ist nur die Spannung $u_4(t)$ zu bestimmen. Hinweis: Bei Anwendung bestimmter Regeln ist der Aufwand relativ gering. Die Berechnung ohne Taschenrechner ist möglich, aber nicht zu empfehlen.

Gegeben Daten:

$u_{q1}(t) = 20 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 40^\circ)$

$R_1 = 10 \Omega$

$L_2 = 5 \text{ mH}$

$u_{q2}(t) = 20 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 45^\circ)$

$R_3 = 20 \Omega$

$L_4 = 40 \text{ mH}$

$u_{q5}(t) = 30 \text{ V} \cdot \sin(\omega t + 60^\circ)$

$R_6 = 111 \Omega$

$u_{q6}(t) = 28.28 \text{ V} \cdot \sin(\omega t)$

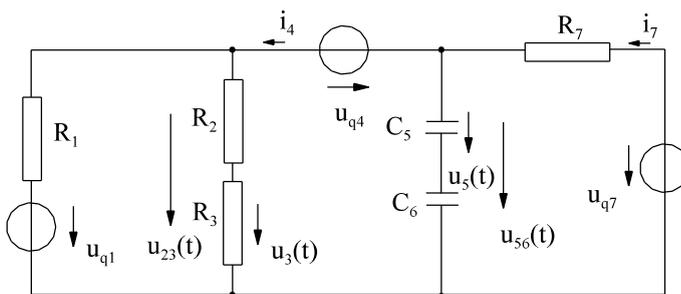
$u_{q7}(t) = 20 \text{ V} \cdot \cos(\omega t - 45^\circ)$

$R_7 = 17 \Omega$

$f = \frac{500}{2\pi} \text{ Hz}$

Aufgabe 6.6.1.B

(Klausur 24.01.2002 Aufgabe 2)



$f = \frac{5000}{2\pi} \text{ Hz}$

Bei der dargestellten Schaltung ist nur der Zeitverlauf der Spannung $u_5(t)$ zu berechnen. Die gegebenen Daten:

$u_{q1}(t) = 400 \text{ V} \cdot \sin(\omega t)$

$R_1 = 40 \Omega$

$u_3(t) = 80 \text{ V} \cdot \sin(\omega t)$

$R_2 = 60 \Omega$

$C_5 = 3 \mu\text{F}$

$u_{q4}(t) = 120 \text{ V} \cdot \sin(\omega t)$

$R_3 = 20 \Omega$

$C_6 = 7 \mu\text{F}$

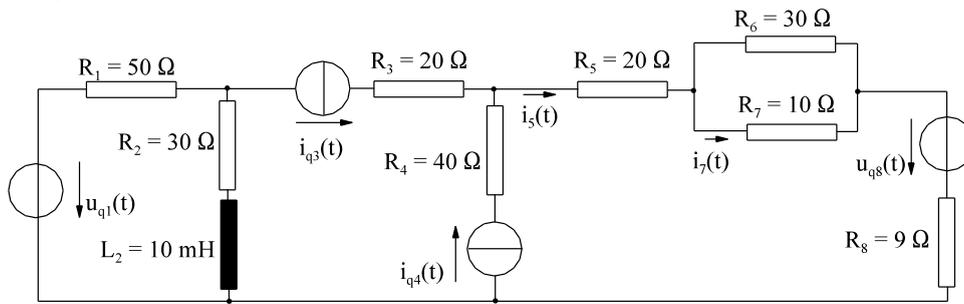
$u_{q7}(t) = 300 \text{ V} \cdot \sin(\omega t) + 100 \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$

$R_7 = 50 \Omega$

Hinweis

Die Aufgabe sieht aufwendig aus. Die Berechnung erfordert aber wenig Aufwand. Eine komplette Lösung wäre viel zu aufwendig. Achtung: Die Spannung $u_3(t)$ ist schon gegeben.

Aufgabe 6.6.2.A



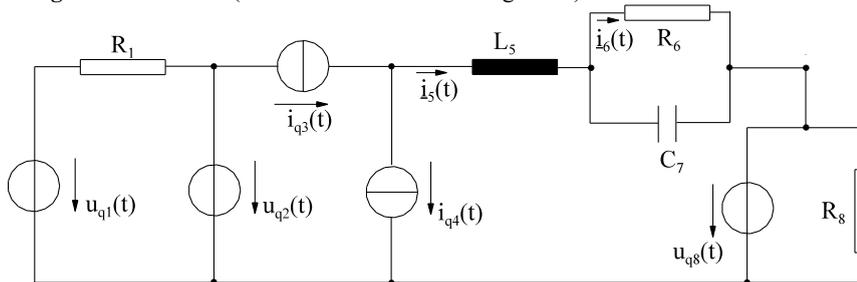
Im dargestellten Netzwerk ist nur der Strom $i_7(t)$ zu bestimmen. Hinweis: Bei Anwendung bestimmter Regeln ist der Aufwand relativ gering. Die Berechnung ohne Taschenrechner ist möglich, aber nicht zu empfehlen.

fehlen.

Gegebene Daten des Netzwerks:

$u_{q1}(t) = 11 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 20^\circ)$ $i_{q3}(t) = 2 \text{ A} \cdot \cos(\omega t)$
 $u_{q8}(t) = 12 \text{ V} \cdot \sin(\omega t + 30^\circ)$ $i_{q4}(t) = 2 \text{ A} \cdot \sin(\omega t)$

Aufgabe 6.6.2.B (Klausur 06.07.2000 Aufgabe 3)

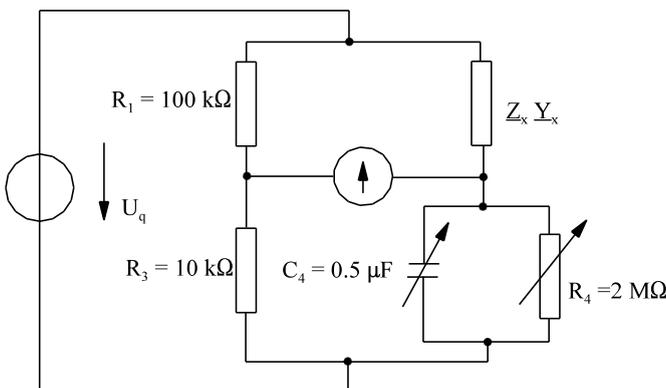


Im dargestellten Netzwerk ist nur der Strom $i_6(t)$ zu bestimmen. Hinweis: Bei Anwendung bestimmter Regeln ist der Aufwand relativ gering. Die Berechnung ohne Taschenrechner ist möglich, aber nicht zu empfehlen.

Gegebene Daten des Netzwerks:

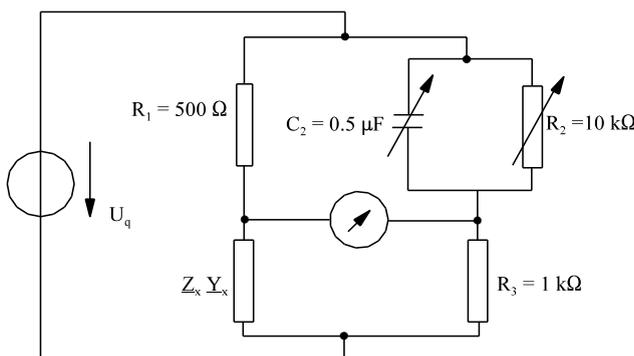
$u_{q1}(t) = 200 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 20^\circ)$ $i_{q3}(t) = 10 \text{ A} \cdot \cos(\omega t + 45^\circ)$ $R_1 = 100 \Omega$
 $u_{q2}(t) = 300 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 70^\circ)$ $i_{q4}(t) = 10 \text{ A} \cdot \sin(\omega t + 45^\circ)$ $L_5 = 20 \text{ mH}$
 $u_{q8}(t) = 230 \text{ V} \cdot \sin(\omega t + 60^\circ)$ $R_6 = 200 \Omega$ $C_7 = 5 \mu\text{F}$
 $R_8 = 512 \Omega$ $f = \frac{1000}{2\pi} \text{ Hz}$

Aufgabe 6.6.3.A



Die dargestellte Brücke ist abgeglichen. Bestimmen Sie das Ersatzschaltbild (ESB) und die Daten des realen Zweipols. Die Art des Zweipols ist anzugeben.

Aufgabe 6.6.3.B



Die dargestellte Brücke ist abgeglichen. Bestimmen Sie das Ersatzschaltbild (ESB) und die Daten des realen Zweipols.

Aufgabe 6.6.4.A

Ein Motor nimmt an 220 V/50 Hz Wechselspannung eine Wirkleistung von 4 kW und eine Blindleistung von 6 kvar induktiv auf. Wie groß ist eine parallele Kapazität zu wählen, damit eine resultierte Blindleistung von 200 var auftritt.

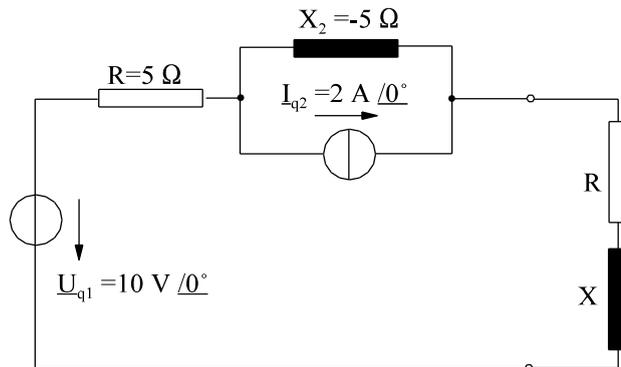
Aufgabe 6.6.4.B

Eine Leuchtstofflampe ($U = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$) mit einer Gesamtwirkleistungsaufnahme $P = 50 \text{ W}$ und einem $\cos(\varphi_1) = 0.5$ induktiv soll durch Parallelschaltung eines Kondensators einen $\cos(\varphi_2) = 0.9$ induktiv bekommen. Wie groß ist der Kondensator C zu wählen. Wie groß sind Wirk-, Blind- und Scheinleistung vor der Kompensation (Index 1) und nach der Kompensation (Index 2).

Aufgabe 6.6.5.A

Eine Spannungsquelle $\underline{U}_{q1} = 100 \text{ V } /0^\circ$ mit dem Innenwiderstand $\underline{Z}_i = 10 \Omega + j20 \Omega$ wird mit dem Widerstand $\underline{Z} = R + jX$ belastet. Wie groß müssen R und X gewählt werden damit

- die Wirkleistung P maximal wird und
- die Scheinleistung S ein Maximum hat.
- Wie groß ist P_{\max} für a).
- Berechnen Sie S_{\max} für b).

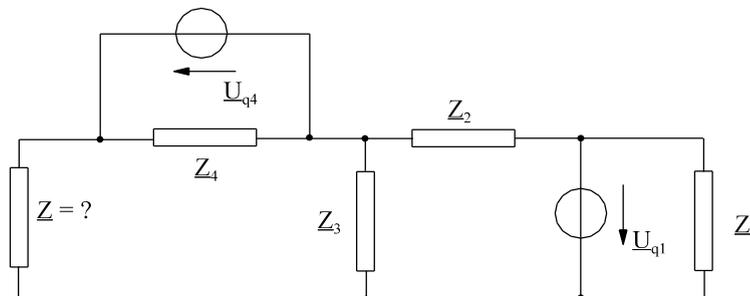
**Aufgabe 6.6.5.B**

Im dargestellten Netzwerk sind die Werte von R und X zu bestimmen unter der Bedingung

- maximale Scheinleistung an Z
 - maximale Wirkleistung an R
- Die Wirk- und Blindleistung sind jeweils anzugeben.

Aufgabe 6.6.5.C

(Klausur 03.07.1999 Aufgabe 7, leicht abgeändert)



Gegebene Daten des Netzwerkes:

$$\underline{Z}_1 = (12 + j8) \Omega \quad \underline{U}_{q1} = 12 \text{ V } /0^\circ$$

$$\underline{Z}_2 = (20 + j10) \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = (5 - j10) \Omega$$

$$\underline{Z}_4 = (16 + j12) \Omega \quad \underline{U}_{q4} = 5 \text{ V } /90^\circ$$

- Bestimmen Sie \underline{Z} , damit die Scheinleistung an \underline{Z} maximal wird. Berechnen Sie Wirk- und Blindleistung an \underline{Z} .
- Bestimmen Sie \underline{Z} , damit die Wirkleistung an \underline{Z} maximal wird. Berechnen Sie Wirk- und Blindleistung an \underline{Z} .

Aufgabe 6.6.6.A

Wandeln Sie die Reihenschaltung $\underline{Z}_R = R_R + jX_R$ in eine äquivalente Parallelschaltung mit R_p und X_p um. Unter welcher Bedingung ist diese Umformung zulässig?

$$\underline{Z}_R = (10 + j20) \Omega$$

Aufgabe 6.6.6.B

Wandeln Sie die Parallelschaltung R_p und X_p in eine äquivalente Reihenschaltung mit $\underline{Z}_R = R_R + jX_R$ um. Unter welcher Bedingung ist diese Umformung zulässig?

$$R_p = 60 \Omega$$

$$X_p = 80 \Omega$$

6.7. Frequenzabhängigkeit	102
6.7.1. Frequenzgang und Übertragungsfunktion	102
6.7.1.1. Frequenzgang	102
6.7.1.2. Übertragungsfunktion	103
6.7.2. Logarithmisches Übertragungsmaß	104
6.7.3. Darstellung nach Betrag und Phase	105
6.7.3.1. Lineare Darstellung	105
6.7.3.2. Logarithmische Darstellung	107
6.7.3.2.1. Grundlagen der logarithmischen Darstellung	108
6.7.3.3. Anwendung der logarithmischen Darstellung	109
6.7.3.4. Fragen und Aufgaben zu frequenzabhängigen Widerständen	112
6.7.4. Ortskurven	116
6.7.4.1. Wiederholung: Mathematische Grundlagen der Ortskurve	116
6.7.4.2. Physikalische Ortskurven	122
6.7.4.3. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 6.7.4	129
6.7.5. Filter	131
6.7.5.1. Einteilung	131
6.7.5.2. Grenzfrequenz und Bandbreite	132
6.7.5.3. Bode-Diagramm	132
6.7.5.4. Tiefpass 1.Ordnung	133
6.7.5.5. Hochpass 1.Ordnung	137
6.7.5.6. Bandpass	140
6.7.5.7. Tiefpass 2.Ordnung	142
6.7.5.8. Beispiele, Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 6.7.5	145
6.7.6. Schwingkreise	155
6.7.6.1. Freie Schwingungen	155
6.7.6.2. Erzwungene Schwingungen	157
6.7.6.3. Reihenschwingkreis	157
6.7.6.4. Parallelschwingkreis	167
6.7.6.5. Vergleich: Reihen- und Parallelschwingkreis	171
6.7.6.6. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 6.7.6	172

6.7. Frequenzabhängigkeit

Bislang ist davon ausgegangen worden, dass eine Wechselstromschaltung für die bestimmte Frequenz berechnet wird. In der Energietechnik braucht bei linearer Belastung der Stromkreis nur für $f = 50$ Hz betrachtet werden. In der analogen Nachrichtentechnik werden Informationen mit Hilfe von Abweichungen von einer Trägerfrequenz übermittelt. Die Aufgabe ist, zum einen die interessierenden Nachrichten mit Hilfe von Filtern aus einer Summe von Informationen wieder herauszufiltern. Zum anderen haben elektrische Signale eine gewisse Frequenzbreite. In den interessierenden Frequenzbereich muss die Übertragung der Nachricht betrachtet werden. Auch in der nichtlinearen Energietechnik muss die Auswirkung der Oberschwingungen betrachtet werden.

bisher	-	jetzt	$\omega = 2\pi f$
\underline{Z}	-	$\underline{Z}(\omega)$	
\underline{U}	-	$\underline{U}(\omega)$	
\underline{I}	-	$\underline{I}(\omega)$	
\underline{S}	-	$\underline{S}(\omega)$	

Für die betrachteten Größen soll in diesem Abschnitt die Frequenzabhängigkeit diskutiert werden. Üblich ist auch die Größen als Funktion von der Kreisfrequenz ω zu betrachten. Da es sich bei den oberen physikalischen Größen um komplexe Variable handelt, sind zwei Komponenten in Abhängigkeit eines reellen Parameters (meist ω) darzustellen. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten

- Betrag und Phase einzeln betrachten (Kap. 6.7.3)
- komplexe Größen als Ortskurve darstellen (Kap. 6.7.4)

Vorher sollen noch die Begriffe

- Übertragungsfunktion (Kap. 6.7.1)
- Logarithmisches Übertragungsmaß (Kap. 6.7.2)

diskutiert werden, da diese später wieder benötigt werden. Anwendung finden obere Methoden auch bei:

- Filter (Kap. 6.7.5)
- Schwingkreise (Kap. 6.7.6)

6.7.1. Frequenzgang und Übertragungsfunktion

6.7.1.1. Frequenzgang

Der Frequenzgang wird definiert als das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung.



$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)}$$

Bild EG6711A

Der Frequenzgang ist im allgemeinen von der Frequenz, bzw. Kreisfrequenz abhängig, üblich ist aber auch die Abhängigkeit von $j\omega$ oder ω zu beschreiben.

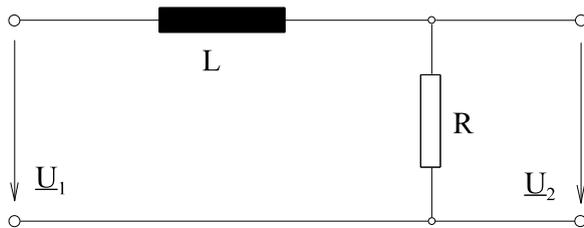
Beispiel:

Bild EG6711B

Nach der Spannungsteilerregel lässt sich berechnen

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega L/R}$$

mit $\omega_e = R/L$

ergibt sich

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_e}$$

Weitere Anwendungen des Frequenzganges erfolgen in späteren Abschnitten. Dargestellt wird der Frequenzgang durch Ortskurven (Kap. 6.7.4) oder nach Betrag und Phase (Kap. 6.7.3).

6.7.1.2. Übertragungsfunktion

Der Frequenzgang untersucht nur das Verhalten im eingeschwungenen Zustand. Um das Übertragungsverhalten allgemein zu charakterisieren, z.B. bei Schaltvorgängen, (3. Semester, Kap. 10) wird eine komplexe Variable p eingeführt:

$$p = \sigma + j\omega$$

Im eingeschwungenen Zustand, welcher nur in EGII betrachtet wird, kann $\sigma = 0$ gleich Null gesetzt werden. Die Übertragungsfunktion erhält man, indem im Frequenzgang $j\omega$ durch p ersetzt wird.

Frequenzgang	=>	Übertragungsfunktion	
$\underline{F}(j\omega)$	=>	$(j\omega \rightarrow p)$	- $F(p)$

Für das Beispiel aus Kap. 6.7.1.1 erhält man:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_e}$$

$$\underline{F}(p) = \frac{1}{1 + p / \omega_e}$$

Für die drei Grundelemente können p -abhängige Widerstände eingeführt werden, in dem für $j\omega$ gleich p gesetzt wird:

	$\underline{Z} = R$	=>	$Z = R$
	$\underline{Z} = j\omega L$	=>	$Z = pL$
	$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	=>	$Z = \frac{1}{pC}$

Reihen- und Parallelschaltungen sind wieder wie im Gleichstromkreis und wie bei komplexen Widerständen möglich. Auch Spannungsquellen lassen sich als Funktion von p angeben (Kap. 10, 3. Semester). Für die eingeschwungene Wechselstromrechnung ist es manchmal weniger aufwendig $j\omega$ durch p zu ersetzen.

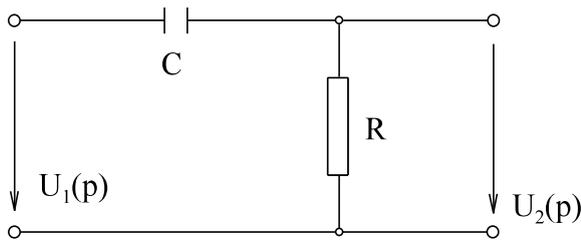
Beispiel:

Bild EG6712A

$$F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{RpC}{1 + RpC}$$

$$\omega_e = \frac{1}{RC}$$

$$F(p) = \frac{p / \omega_e}{1 + p / \omega_e}$$

Hier könnte aus $F(p)$ sofort wieder der Frequenzgang berechnet werden:

$$F(j\omega) = \frac{j\omega / \omega_e}{1 + j\omega / \omega_e}$$

Manchmal ist es einfacher mit p anstatt mit $j\omega$ zu rechnen. Für Übertragungsfunktionen von linearen Netzwerken mit R , L und C ergeben sich immer gebrochen rationale Funktionen für die Übertragungsfunktion.

$$F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{b_m * p^m + b_{m-1} * p^{m-1} + \dots + b_2 * p^2 + b_1 * p + b_0}{a_n * p^n + a_{n-1} * p^{n-1} + \dots + a_2 * p^2 + a_1 * p + 1} \quad m \leq n$$

Übertragungsfunktionen und Widerstände in p werden wieder bei Einschaltvorgängen (3.Semester, Kap. 10) behandelt.

6.7.2. Logarithmisches Übertragungsmaß

Folgende Gründe lasen die Einführung eines logarithmischen Übertragungsmaßes ratsam erscheinen:

- Spannungsverhältnisse können mehrere Zehnerpotenzen überstreichen. Der Logarithmus als Verhältnisses hat dabei eine geringere Bandbreite.
- Mit $\underline{F}(j\omega) = F * e^{j\varphi}$ ergibt $\ln(\underline{F}) = \ln(F) + j\varphi$ die Aufspaltung nach Betrag und Phase.
- Bei einem Produkt $F = F_1 * F_2$ kann bei Logarithmierung $\ln(F) = \ln(F_1) + \ln(F_2)$ die Multiplikation auf eine Addition zurückgeführt werden.

Die Definition des Übertragungsmaßes lautet:

$$F_{dB} = 20 \text{ dB} * \lg(F) = 20 \text{ dB} * \lg\left(\frac{U_2}{U_1}\right) = 10 \text{ dB} * \lg\left[\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2\right]$$

$$F_{dB} = 10 \text{ dB} * \lg(F_p) = 10 \text{ dB} * \lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

B - Bel

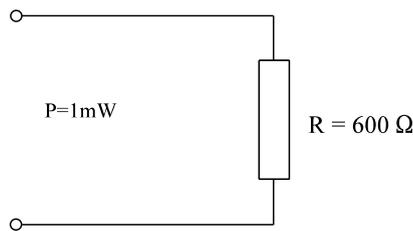
$[F_{dB}] = \text{dB} = \text{"dezi Bell"}$

Das Übertragungsmaß ist für Spannungen und Leistungen definiert. Da die Leistung proportional zu U^2 ist, ergibt sich logarithmiert dem Faktor "2".

DIN 5493

Elektrische Größen können nach DIN 5493 auch direkt im logarithmischen Maß angegeben werden. Dabei muss

auf einen Bezugswert normiert werden. Der Bezugswert ist dabei ein ohmscher Widerstand von $R = 600 \Omega$ an den eine Leistung $P = 1 \text{ mW}$ umgesetzt wird. Die Einheit ist dann dBm.



$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = 1.29 \text{ mA}$$

$$U = \sqrt{R \cdot P} = 0.775 \text{ V}$$

Bild EG672A

$$U_{\text{dB}} = 20 \text{ dBm} \lg \frac{U}{0.775 \text{ V}}$$

$$I_{\text{dB}} = 20 \text{ dBm} \lg \frac{I}{1.29 \text{ mA}}$$

$$P_{\text{dB}} = 10 \text{ dBm} \lg \frac{P}{1 \text{ mW}}$$

Die Angabe in Neper hat sich noch nicht so durchgesetzt:

$$F_{\text{Np}} = 1 \text{ Np} * \ln \left(\frac{U_2}{U_1} \right) \quad \text{Np - Neper}$$

$$10 \text{ dB} = 1.15 \text{ Np}$$

$$1 \text{ Np} = 8.686 \text{ dB}$$

6.7.3. Darstellung nach Betrag und Phase

6.7.3.1. Lineare Darstellung

Auf Arbeitsblatt EGII-7 ist für sieben verschiedene Elemente bzw. Schaltungen der komplexe Widerstand nach Betrag und Phase dargestellt.

a) Widerstand R

$$\underline{Z} = R$$

$$Z = R\varphi = 0^\circ$$

Der rein ohmsche Widerstand ist nicht frequenzabhängig.

b) Induktivität L

$$\underline{Z} = j\omega L$$

$$Z = \omega L\varphi = 90^\circ$$

Der Phasenwinkel der idealen Induktivität ist unabhängig von der Frequenz 90° . Der Betrag des Scheinwiderstandes steigt linear mit der Frequenz an. Für $f = 0$ ist auch der Widerstand Null, also Kurzschluss. Für $f \rightarrow \infty$ geht auch der Scheinwiderstand gegen unendlich, also wirkt wie ein Leerlauf.

$$f = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Kurzschluss}$$

$$f \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad Z = \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Leerlauf}$$

c) Kapazität C

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z = \frac{1}{\omega C}$$

$$\varphi = -90^\circ$$

Der Phasenwinkel eines idealen Kondensators beträgt unabhängig von der Frequenz -90° . Der Betrag des Scheinwiderstandes ist umgekehrt proportional zur Frequenz. Für $f = 0$ ist der Scheinwiderstand unendlich und die Kapazität wirkt damit für Gleichstrom ($f = 0$) als Leerlauf. Für $f \rightarrow \infty$ geht der Scheinwiderstand gegen Null. Damit wirkt die Kapazität bei hohen Frequenz als ein Kurzschluss.

$$f = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Leerlauf}$$

$$f \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad Z = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Kurzschluss}$$

Kapazität und Induktivität verhalten sich in Bezug auf die Grenzfälle hoher und tiefer Frequenzen genau entgegengesetzt.

d) Reihenschaltung R-L

$$\underline{Z} = R + j\omega L \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Mit den Grenzwertbetrachtungen der idealen Induktivität kann diese Schaltung analysiert werden.

Für $f \approx 0$ wirkt die Induktivität als Kurzschluss. Der Scheinwiderstand ist gleich dem ohmschen Widerstand und der Phasenwinkel entsprechend ohmscher Last etwa Null.

Bei hohen Frequenzen $f \rightarrow \infty$ überwiegt die Induktivität ($\omega L \gg R$). Der Verlauf von Z und φ zeigt dann das asymptotische Verhalten der reinen Induktivität, vergleiche mit Bild b.

e) Reihenschaltung R-C

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Für $f = 0$ wirkt der Kondensator als Leerlauf, der Scheinwiderstand wird unendlich. Für $f \approx 0$ überwiegt der Blindanteil des Kondensators. Der Phasenwinkel beträgt etwa -90° , der Betrag des Scheinwiderstandes zeigt asymptotisches Verhalten zur reinen Kapazität nach c. Für $f \rightarrow \infty$ wirkt die Kapazität als Kurzschluss. Der Betrag des Widerstandes nähert sich dann asymptotisch dem Wert von R und der Winkel geht gegen Null.

f) Parallelschaltung R-C

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} \quad Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}} \quad \varphi = -\arctan(\omega RC)$$

Für tiefe Frequenzen wirkt der Kondensator als Leerlauf, der Scheinwiderstand wird von R bestimmt und der Phasenwinkel ist Null. Bei hohen Frequenz überwiegt der Kurzschluss der Kapazität und der Phasenwinkel nähert sich -90° .

g) Parallelschaltung R-L

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} \quad Z = \frac{\omega LR}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \quad \varphi = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{j\omega L}{j\omega \frac{L}{R} + 1} \cdot \frac{R}{R} = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}} R \quad \omega_e = \frac{R}{L}$$

$$\underline{Z} = \frac{j\omega / \omega_e}{1 + j\omega / \omega_e} R \quad Z = \frac{\omega / \omega_e}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_e)^2}} R \quad \varphi = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)$$

Bei hohen Frequenzen wirkt die Induktivität als Leerlauf. Der Scheinwiderstand nähert sich dem ohmschen Widerstand asymptotisch an. Der Phasenwinkel geht gegen Null.

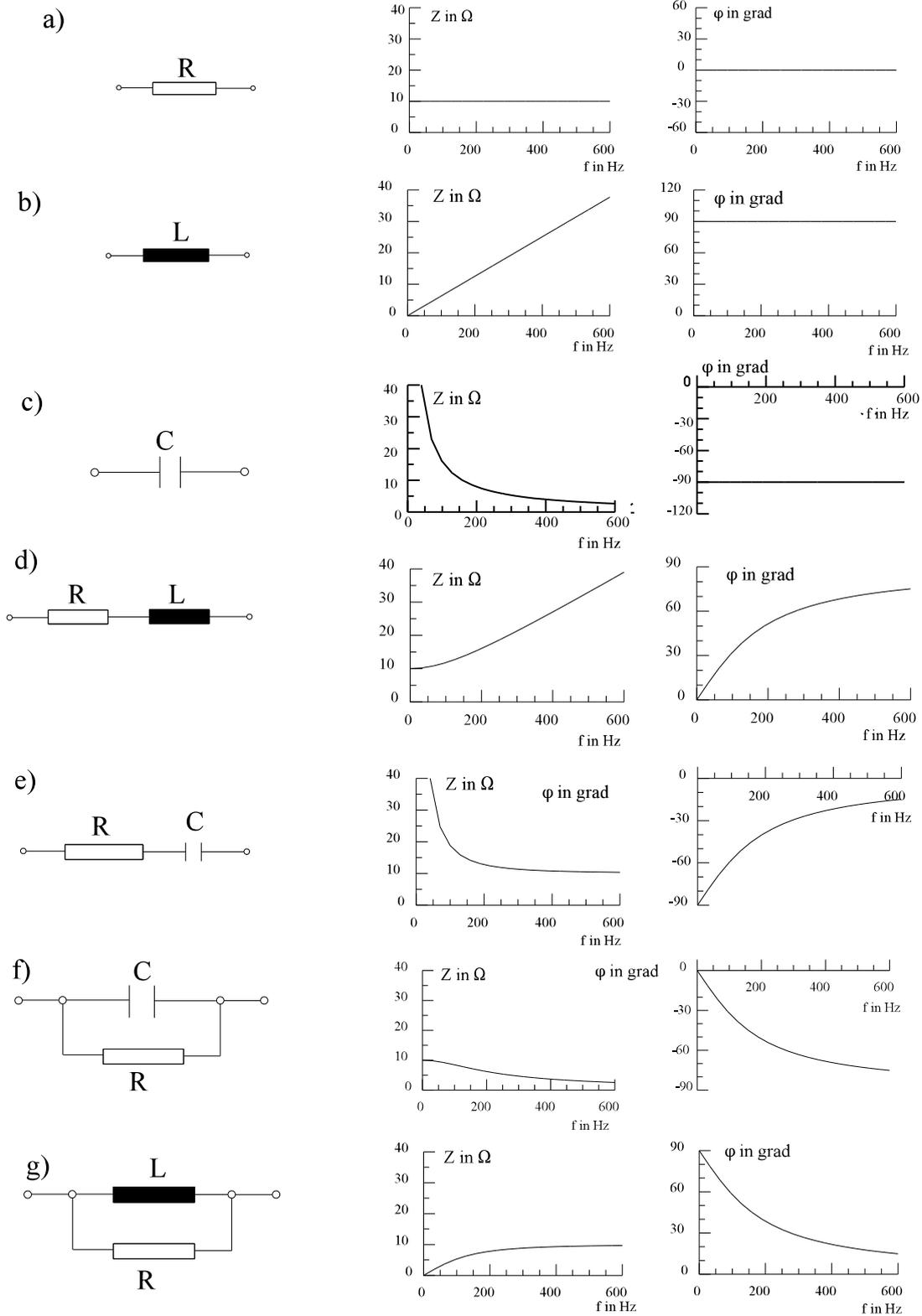
Bei tiefen Frequenz wirkt die Induktivität als Kurzschluss. Der Scheinwiderstand geht gegen Null, wie bei der idealen Induktivität. Da die Induktivität überwiegt, geht der Phasenwinkel gegen 90° .

Es ist auch möglich die anderen physikalischen Größen Leitwert, Strom, Spannung, Leistung nach Betrag und Phase darzustellen.

Weitere Anwendung von linearer Darstellung von Betrag und Phase in Kap. 6.7.6 (Schwingkreise).

Arbeitsblatt EGII-7

Lineare Darstellung nach Betrag und Phase



$R = 10 \Omega$

$L = 10 \text{ mH}$

$C = 100 \mu\text{F}$

$\omega_e = R/L = 1/(RC) = 10^3 \text{ s}^{-1}$

6.7.3.2. Logarithmische Darstellung

Auf Arbeitsblatt EGII-7 ist ein verhältnismäßig kleiner Frequenzbereich in linearer Darstellung gezeigt. Würde man z.B. bis $f = 6 \text{ kHz}$ die Größen darstellen, ist im unteren Frequenzbereich kaum etwas zu erkennen. Abhilfe: logarithmische Darstellung.

6.7.3.2.1. Grundlagen der logarithmischen Darstellung

Bei logarithmischer Darstellung unterscheidet man:

beide Achsen linear	→	lineare Darstellung
eine Achse linear		
eine Achse logarithmisch	→	halb logarithmische Darstellung
beide Achse logarithmisch	→	doppelt logarithmische Darstellung

Vorteile der logarithmische Darstellung:

- weiter Variablenbereich darstellbar
- Multiplikation zweier Funktionen entspricht Addition

Nachteile der logarithmische Darstellung:

- keine Darstellung der Null möglich
- etwas ungenauer
- nicht linear interpolierbar

Die Darstellung von Potenzfunktionen im doppelt logarithmischen Maßstab wurde in Mathematik I, Kap. 2.7, theoretisch abgeleitet: **Potenzfunktionen im doppelt Logarithmischen Maßstab dargestellt ergeben Geraden**, siehe Arbeitsblatt EGII-8. **Multiplikation mit einem konstanten Faktor bewirkt eine Verschiebung.**

Anleitung zum Zeichnen der Geraden im doppelt logarithmischen Maßstab

Die Potenzfunktion

$$y = a \cdot x^n$$

ergibt im doppelt logarithmischen Maßstab eine Gerade mit der Steigung

$$\text{Steigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{n}{y \text{- Dekade}}}{1} = \frac{n \text{- Dekaden in } y \text{- Richtung}}{\text{Dekade in } x \text{- Richtung}}$$

Ein Punkt der Geraden ist

$$x = 1 \qquad y = a$$

In der E-Technik sind meist nicht nur Potenzfunktionen vorhanden, sondern diese ergeben sich als Asymptoten von physikalischen Funktionen, siehe Bild B, Arbeitsblatt EGII-8 von der Funktion

$$y_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{10}\right)^2}}{\frac{x}{10}}$$

soll das asymptotische Verhalten untersucht werden. Es sind dabei zwei Grenzfälle zu unterscheiden:

$$\frac{x}{10} \ll 1$$

$$\frac{x}{10} \gg 1$$

$$y_{A1} = \frac{1}{\frac{x}{10}}$$

$$y_{A1}^* = \frac{\frac{x}{10}}{\sqrt{\left(\frac{x}{10}\right)^2}}$$

$$Y_{A1} = \frac{10}{x} = 10x^{-1}$$

$$y_{A1}^* = 1 = 10^0$$

Die beiden oberen Funktionen können leicht als Gerade oder als konstante eingezeichnet werden. Ein Punkt der Funktion y_{A1} ist $x = 10 \Rightarrow y_{A1} = 1$. Die Steigung der Funktion y_{A1} beträgt -1y-Dekade pro x-Dekade. Es kann noch der Wert bei $10/x = 1$ eingezeichnet werden. Danach ist eine Skizze der Funktionskurve leicht zu erstellen.

Weitere Anwendung der logarithmischen Darstellung im nächsten Abschnitt und in Kap. 6.7.5.

Arbeitsblatt EGII-8

Darstellung im doppelt logarithmischen Maßstab

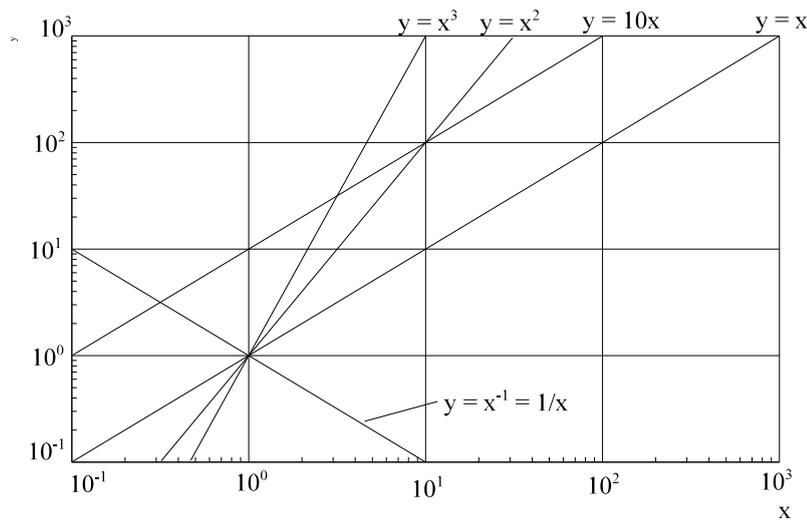


Bild EG67321A

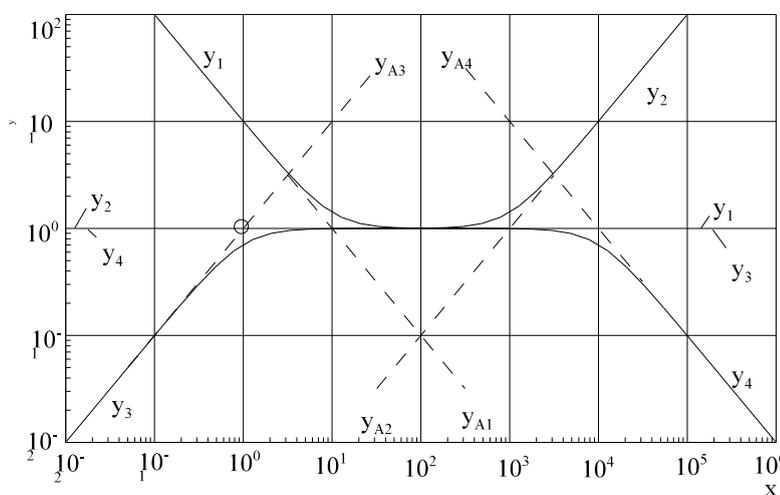


Bild EG67321B

Funktionen:

$$y_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{10}\right)^2}}{\frac{x}{10}} \quad y_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{1000}\right)^2} \quad y_3 = \frac{\frac{x}{1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{1}\right)^2}} \quad y_4 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{10000}\right)^2}}$$

Asymptoten:

$$y_{A1} = \frac{1}{\left(\frac{x}{10}\right)} \quad y_{A2} = \frac{x}{1000} \quad y_{A3} = \frac{x}{1} \quad y_{A4} = \frac{1}{\frac{x}{10000}}$$

6.7.3.3. Anwendung der logarithmischen Darstellung

Für die Elemente und Schaltungen auf Arbeitsblatt EGII-7 wird auf Arbeitsblatt EGII-9 die logarithmische Darstellung gezeigt. Der Winkel wird im halblogarithmischen Maßstab dargestellt und der Betrag des Scheinwiderstandes im doppelt logarithmischen Maßstab. Als abhängige Variable ist die Kreisfrequenz gewählt, weil die Eckfrequenz bei $\omega = 1000$ 1/s gewählt wurde. Das Arbeitsblatt EGII-9 liefert im Prinzip die gleiche Aussage als das Arbeitsblatt EGII-7. Die Kurven lassen sich einfacher konstruieren, weil die Asymptoten Geraden sind. Hier nur zusätzliche Informationen zur logarithmischen Darstellung:

a) Widerstand R

In logarithmischer und nicht logarithmischer Darstellung besteht (wie erwartet) kein Unterschied, weil keine Frequenzabhängigkeit vorhanden ist.

b) Induktivität L

Die Induktivität hat einen linear mit der Frequenz zunehmenden Scheinwiderstand. Die Steigung beträgt:

$$S = \frac{\Delta Z}{\Delta f} = \frac{1 \text{ Dekade Widerstand}}{1 \text{ Dekade Frequenz}}$$

c) Kapazität C

Der Funktionsverlauf ist eine Gerade mit negativer Steigung. Die Steigung beträgt:

$$S = \frac{\Delta Z}{\Delta f} = -\frac{1 \text{ Dekade Widerstand}}{1 \text{ Dekade Frequenz}}$$

d) Reihenschaltung R-L

mathematische Ableitung:

$$\underline{Z} = R + j\omega L = R \left(1 + \omega \frac{L}{R} \right) = R \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_e} \right)$$

$$\omega_e = \frac{R}{L} = 10^3 \frac{1}{s} \quad \text{- Eckkreisfrequenz}$$

Für den Betrag des Scheinwiderstandes

$$Z = R * \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_e} \right)^2}$$

ergeben sich zwei Asymptoten für die Grenzfälle:

$$\omega < \omega_e$$

$$\omega \gg \omega_e$$

$$Z = R$$

$$Z = R * \frac{\omega}{\omega_e} = \frac{R * \omega}{R / L} = \omega L$$

physikalische Ableitung:

Bei kleinen Frequenzen überwiegt der Widerstand und bei hohen Frequenzen die Induktivität. Somit kann die Kurve d aus Kurve a ($\omega < \omega_e$) und Kurve b ($\omega \gg \omega_e$) zusammengesetzt werden.

Hinweis zur Konstruktion des Winkelverlaufes:

Nach Bild d aus Arbeitsblatt EGII-9 kann der Verlauf $\varphi(\omega)$ durch drei Geraden angenähert werden:

$$\omega \leq \frac{\omega_e}{10} \quad \varphi = 0$$

$$\frac{\omega_e}{10} \leq \omega \leq 10\omega_e \quad \text{Gerade durch } \left(\varphi = 0, \quad \omega = \frac{\omega_e}{10} \right) \text{ und } (\varphi = 90^\circ, \omega = 10\omega_e)$$

$$\omega \geq \omega_e \quad \varphi = 90^\circ$$

Zur Annäherung des Winkelverlaufes siehe auch Kap. 6.7.5.

e) Reihenschaltung R-C

tiefe Frequenz	hohe Frequenz
Z_R hoch	Z_R tief
C-überwiegt	R-überwiegt
Verlauf nach c)	Verlauf nach a)

f) Parallelschaltung R-C

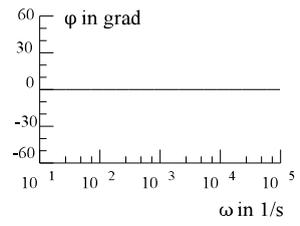
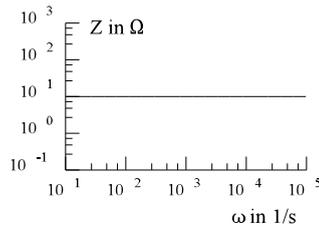
tiefe Frequenz	hohe Frequenz
Z_R etwa R	Z_R tief
R-überwiegt	C-überwiegt
Verlauf nach a)	Verlauf nach c)

g) Parallelschaltung R-L

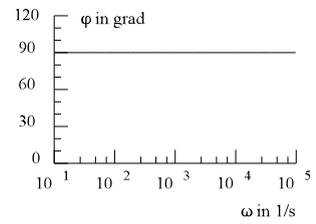
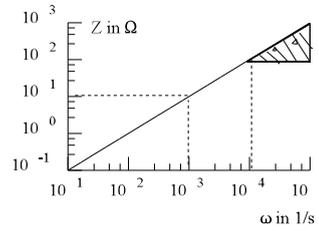
tiefe Frequenz	hohe Frequenz
Z_L Kurzschluss	Z_L etwa R
L-überwiegt	R-überwiegt
Verlauf nach b)	Verlauf nach a)

Arbeitsblatt EGII-9 Logarithmische Darstellung nach Betrag und Phase

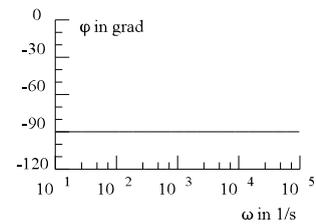
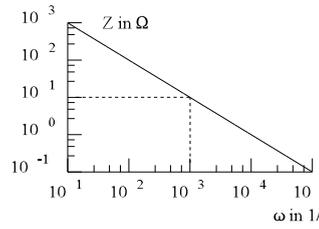
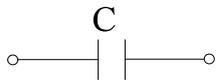
a)



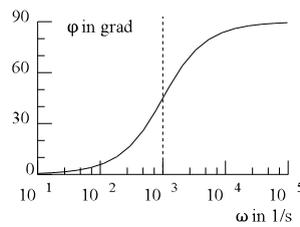
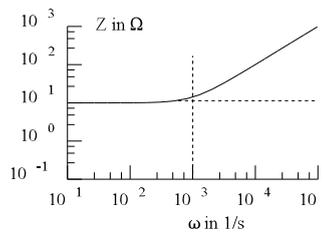
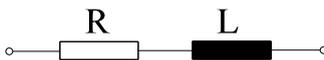
b)



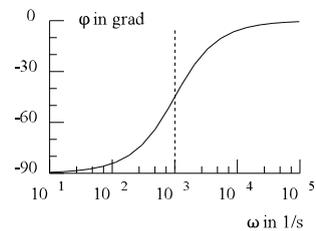
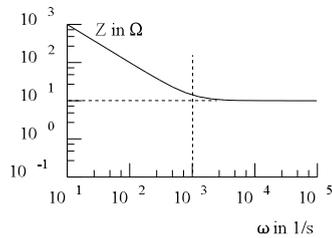
c)



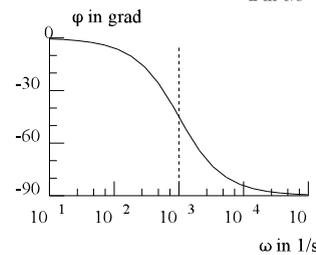
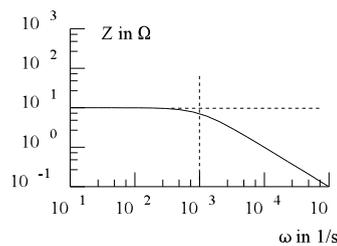
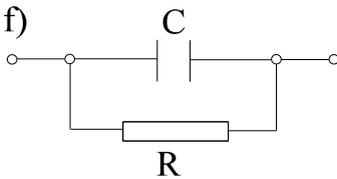
d)



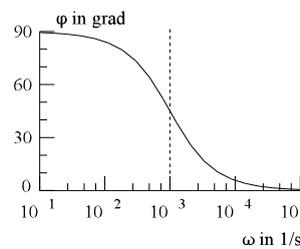
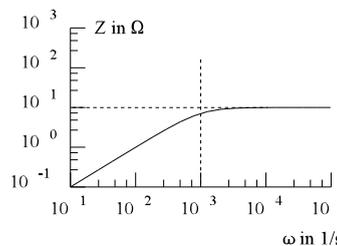
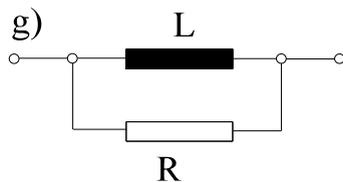
e)



f)



g)



$R = 10 \Omega$

$L = 10 \text{ mH}$

$C = 100 \mu\text{F}$

$\omega_e = R/L = 1/(RC) = 10^3 \text{ s}^{-1}$

6.7.3.4 Fragen und Aufgaben zu frequenzabhängigen Widerständen

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.6.7.3.A	Ein idealer ohmscher Widerstand R: * hat bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) Kurzschlussverhalten * hat bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) Leerlaufverhalten * hat bei großen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) Kurzschlussverhalten * hat bei großen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) Leerlaufverhalten * weist keine Frequenzabhängigkeit auf	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.3.B	Eine ideale Induktivität L: * hat bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) Kurzschlussverhalten * hat bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) Leerlaufverhalten * hat bei großen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) Kurzschlussverhalten * hat bei großen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) Leerlaufverhalten * weist keine Frequenzabhängigkeit auf	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.3.C	Eine ideale Kapazität C: * hat bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) Kurzschlussverhalten * hat bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) Leerlaufverhalten * hat bei großen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) Kurzschlussverhalten * hat bei großen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) Leerlaufverhalten * weist keine Frequenzabhängigkeit auf	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.3.D	Bei einer Reihenschaltung R-L: * dominiert bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) R * dominiert bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) L * dominiert bei hohen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) R * dominiert bei hohen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) L	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.3.E	Bei einer Reihenschaltung R-C: * dominiert bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) R * dominiert bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) C * dominiert bei hohen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) R * dominiert bei hohen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) C	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.3.F	Bei einer Parallelschaltung R-C: * dominiert bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) R * dominiert bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) C * dominiert bei hohen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) R * dominiert bei hohen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) C	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.3.G	Bei einer Parallelschaltung R-L: * dominiert bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) R * dominiert bei kleinen Frequenzen ($\omega \approx 0, f \approx 0$) L * dominiert bei hohen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) R * dominiert bei hohen Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty, f \rightarrow \infty$) L	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.6.7.3.H	Eine Potenzfunktion im doppelt logarithmischen Maßstab dargestellt, ergibt eine * konstante Funktion * Gerade * Parabel	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.3.I	Im doppelt logarithmischen Maßstab dargestellt, ergibt die Darstellung eine Gerade: * konstante Funktion $y = K$ * Gerade durch Null $y = a \cdot x$ * Gerade nicht durch Null $y = a \cdot x + b$ * Parabel durch Null $y = a \cdot x^2$ * Parabel nicht durch Null $y = a \cdot x^2 + b$ * Hyperbel $y = 1/x$	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.3.J	Eine Funktion der Form $y = \sqrt{1 + x^2}$ wird im doppelt logarithmischen Maßstab dargestellt mit Hilfe von * Asymptoten * abschnittweise Geraden * abschnittweise Parabeln * abschnittweise Hyperbeln	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

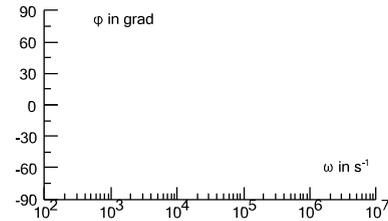
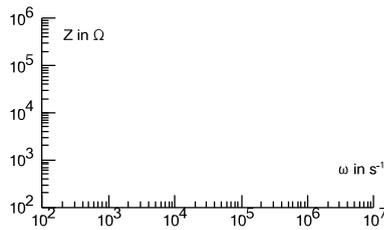
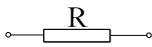
Frage 6.7.3.A Bei hohen Frequenzen wirkt eine Kapazität C wie ein: _____
Frage 6.7.3.B Bei hohen Frequenzen wirkt eine Induktivität L wie ein: _____
Frage 6.7.3.C Bei tiefen Frequenzen wirkt eine Kapazität C wie ein: _____
Frage 6.7.3.D Bei tiefen Frequenzen wirkt eine Induktivität L wie ein: _____
Frage 6.7.3.E Bei einer Reihenschaltung R-L dominiert bei kleinen Frequenzen : _____
Frage 6.7.3.F Bei einer Reihenschaltung R-C dominiert bei kleinen Frequenzen : _____
Frage 6.7.3.G Bei einer Parallelschaltung R-L dominiert bei kleinen Frequenzen : _____
Frage 6.7.3.H Bei einer Parallelschaltung R-C dominiert bei kleinen Frequenzen : _____
Frage 6.7.3.E Bei einer Reihenschaltung R-L dominiert bei hohen Frequenzen : _____
Frage 6.7.3.F Bei einer Reihenschaltung R-C dominiert bei hohen Frequenzen : _____
Frage 6.7.3.G Bei einer Parallelschaltung R-L dominiert bei hohen Frequenzen : _____
Frage 6.7.3.H Bei einer Parallelschaltung R-C dominiert bei hohen Frequenzen : _____

Aufgabe 6.7.3.A

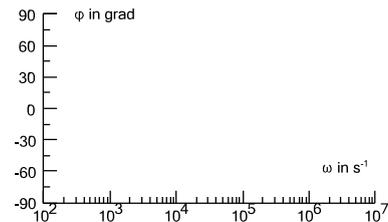
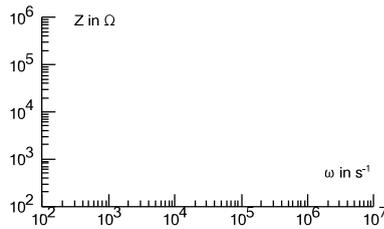
Von den folgenden Schaltungen ist vom komplexen Scheinwiderstand \underline{Z} der Betrag und der Winkel zu skizzieren.

Gegebene Daten : $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$ und $L = 0.1 \text{ H}$.

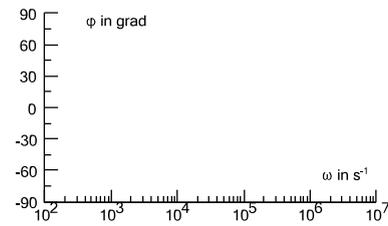
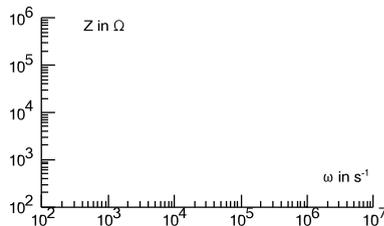
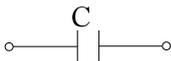
a)



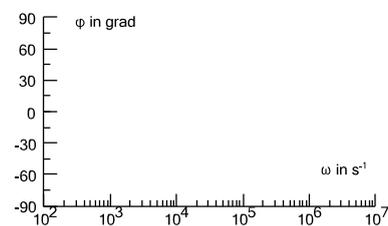
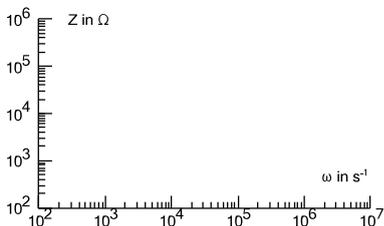
b)



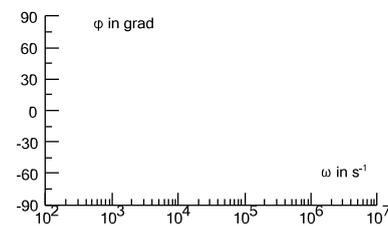
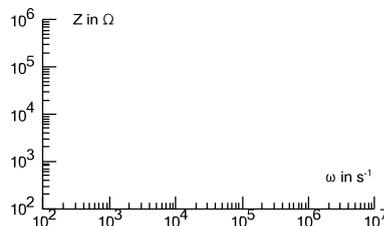
c)



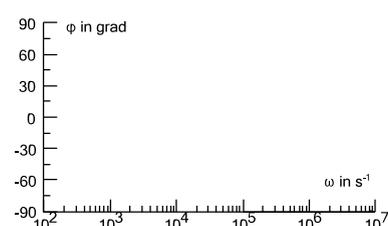
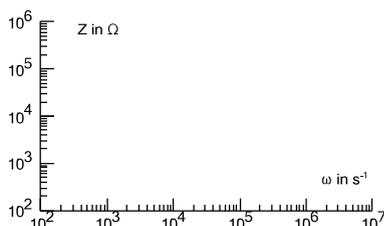
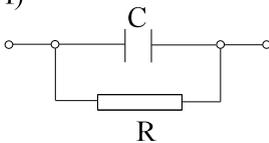
d)



e)



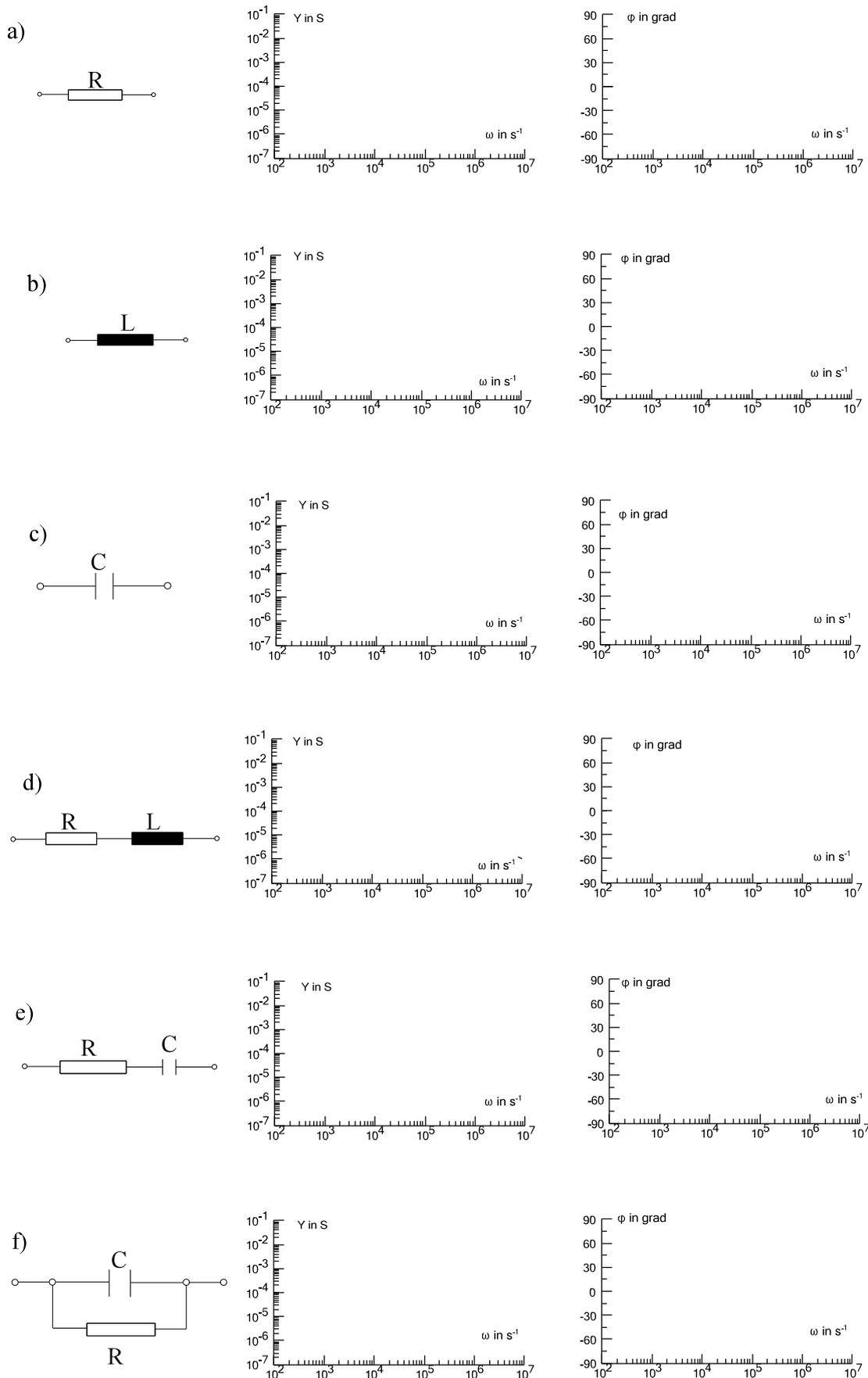
f)



Aufgabe 6.7.3.B

Von den folgenden Schaltungen ist vom komplexen Scheinleitwert \underline{Y} der Betrag und der Winkel zu skizzieren.

Gegebene Daten : $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$ und $L = 0.1 \text{ H}$.



6.7.4. Ortskurven

6.7.4.1. Wiederholung: Mathematische Grundlagen der Ortskurve

Definition: Eine Ortskurve ist eine komplexe Funktion die von einer reellen Variablen abhängig ist. Der Graf der Zeigerspitzen, in der komplexen Ebene dargestellt, nennt man Ortskurve.

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten mathematischen Grundlagen der Ortskurven wiederholt werden.

Komplexe Gerade

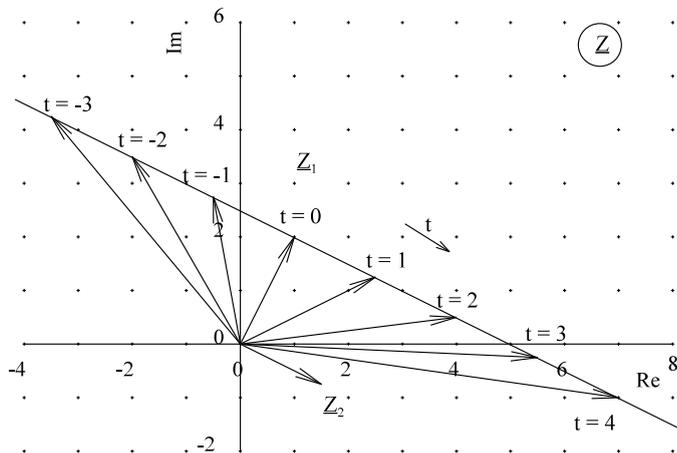


Bild EG6741A

Verbindet man die Zeigerspitzen der Funktion

$$\underline{z}(t) = \underline{z}_1 + \underline{z}_2^* t$$

für verschiedene t -Werte erhält man die komplexe Gerade nach Bild EG6741A. Dabei ist \underline{z}_1 ein Punkt der Geraden, für $t = 0$. Die komplexe Zahl \underline{z}_2 gibt die Richtung der Geraden an. Die wichtigsten analytisch auswertbaren Ortskurven von physikalischen Funktionen in der Elektrotechnik sind komplexe Geraden parallel zu den Achsen der Gauß'sche Zahlenebene und deren Inverse. Die elektrischen Ortskurven sind in der Regel vom reellen Parameter Frequenz f oder besser der Kreisfrequenz ω abhängig. Da mit nur positiven Frequenzen gerechnet wird, ergeben sich als Ortskurven Halbgeraden und deren Inverse. Invertieren ist deshalb so wichtig, weil z.B. die Umwandlung Leitwert-Widerstand und das ohmsche Gesetz eine Invertierung benötigen. Dazu der erste Satz: Die Inversion einer Geraden nicht durch Null ergibt einen Kreis. Oder: **Die Inversion einer Halbgeraden nicht durch Null ergibt einen Halbkreis durch Null.** Auch die umkehrte Folgerung ist richtig: Die Inversion eines Halbkreises durch Null ergibt eine Gerade nicht durch Null.

Das Ergebnis der Invertierung von vier komplexen Geraden (parallel zu den Achsen) ist auf Arbeitsblatt EGII-10 dargestellt.

Die dichteste Entfernung Gerade-Ursprung wird abgebildet auf die weiteste Entfernung Kreis-Ursprung. Dieses ist der Durchmesserzeiger des Kreises. Der Punkt $t = \infty$ wird immer abgebildet auf den Ursprung. Somit kann der Kreis konstruiert werden.

Wiederholung: Invertierung einer komplexen Zahl

$$\underline{z}_D = r * e^{j\varphi}$$

$$\frac{1}{\underline{z}_D} = \frac{1}{r * e^{j\varphi}} = \frac{1}{r} * e^{-j\varphi}$$

Durch die Invertierung wird der Betrag invertiert und der Winkel negiert. Mit Hilfe dieser Information kann die Lage des Halbkreises bestimmt werden. Zurück zu Arbeitsblatt EGII-10:

	Winkelbereich \underline{z}	Winkelbereich \underline{w}
a)	$0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$	$-90^\circ < \varphi \leq 0^\circ$
b)	$0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$	$-90^\circ < \varphi \leq 0^\circ$
c)	$-90^\circ < \varphi \leq 0^\circ$	$0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$
d)	$-180^\circ \leq \varphi < 90^\circ$	$90^\circ > \varphi \geq 180^\circ$

Konstruktionshinweise zur Invertierung komplexer Geraden

A] Dichteste Entfernung zur Geraden bestimmen \underline{z}_D

B] $\underline{w}_D = \frac{1}{\underline{z}_D}$ - Durchmesserzeiger des Kreises

C] $t \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{w}(t \rightarrow \infty) = (0 + j0)$

D] Mittelpunkt $\underline{w}_{\text{mittel}} = \frac{1}{2} (\underline{w}_D + \underline{w}_\infty) = \frac{1}{2} \underline{w}_D$

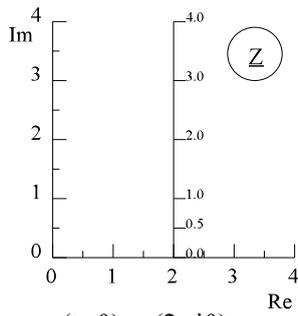
E] Halbkreis über Invertierungsgesetze auswählen

F] t-Skalierung durchführen

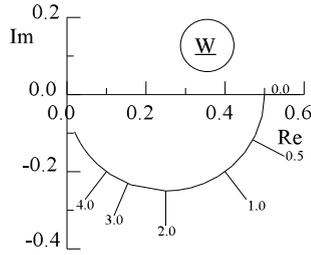
Arbeitsblatt EGII-10

Invertierung komplexer Geraden $\underline{w}(t) = \frac{1}{\underline{z}(t)}$

$$\underline{w}(t=0) = \frac{1}{\underline{z}(t=0)}$$



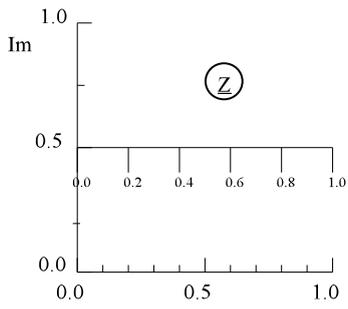
$$\underline{z}(t=0) = (2+j0)$$



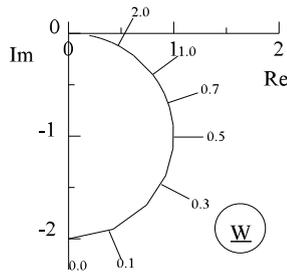
$$\Leftrightarrow \underline{w}(t=0) = (0.5+j0)$$

$$\underline{z} = 2 + jt$$

$$\underline{w} = \frac{1}{2 + jt}$$



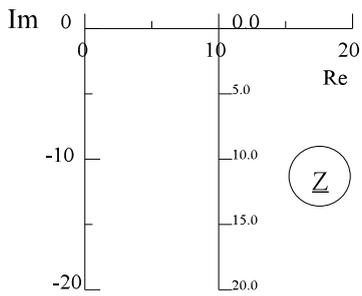
$$\underline{z}(t=0) = (0+j0.5)$$



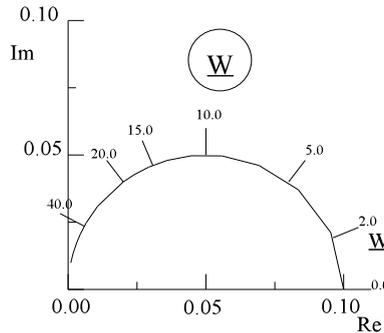
$$\Leftrightarrow \underline{w}(t=0) = (0-j2)$$

$$\underline{z} = t + j0.5$$

$$\underline{w} = \frac{1}{t + j0.5}$$



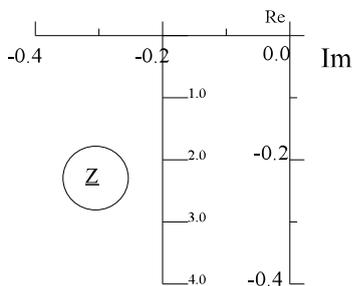
$$\underline{z}(t=0) = (10+j0)$$



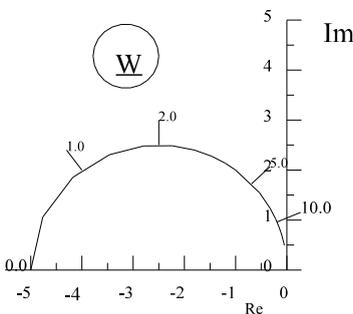
$$\Leftrightarrow \underline{w}(t=0) = (0.1+j0)$$

$$\underline{z} = 10 - jt$$

$$\underline{w} = \frac{1}{10 - jt}$$



$$\underline{z}(t=0) = (-0.2+j0)$$



$$\Leftrightarrow \underline{w}(t=0) = (-5+j0)$$

$$\underline{z} = -0.2 - j0.1t$$

$$\underline{w} = \frac{1}{-0.2 - j0.1t}$$

Invertierung einer Geraden durch Null

Beispiel: $\underline{z}(t) = j * t$ $\underline{w}(t) = \frac{1}{jt}$

$$\underline{w}(t) = \frac{1}{jt} = -\frac{1}{t} * j = -s * t \quad s = \frac{1}{t}$$

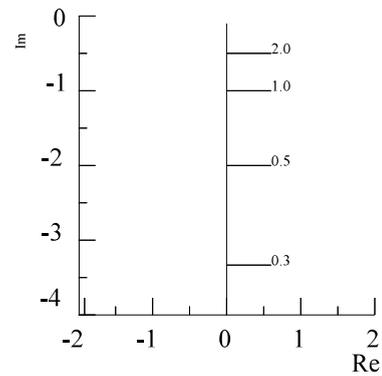
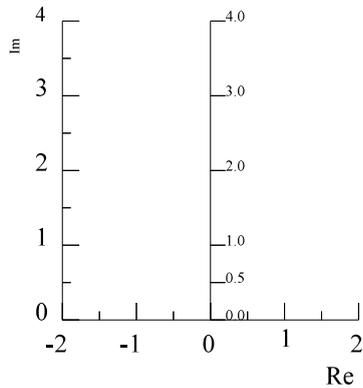


Bild EG6741B

Ergebnis: Die Invertierung einer Geraden mit linearer Teilung durch Null ergibt wieder eine Gerade durch Null allerdings mit nichtlinearer Teilung.

Zusammenfassung

Invertierung von	ergibt
Gerade nicht durch Null	Kreis durch Null
Gerade durch Null	Gerade durch Null
Kreis durch Null	Gerade nicht durch Null
Kreis nicht durch Null	Kreis nicht durch Null

Die allgemeine Form von komplexen Kreisen und Geraden lautet:

$$\underline{w}(t) = \frac{\underline{z}_1 + \underline{z}_2 * t}{\underline{z}_3 + \underline{z}_4 * t}$$

Allgemeine Ortskurven

Elektrische Netzwerke mit einem Energiespeicher (C oder L) ergeben Ortskurven als Kreise oder Geraden. Netzwerke höherer Ordnung ergeben im allgemeinen Ortskurven der Form

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{b_m * (j\omega)^m + b_{m-1} * (j\omega)^{m-1} + \dots + b_2 * (j\omega)^2 + b_1 * (j\omega) + b_0}{a_n * (j\omega)^n + a_{n-1} * (j\omega)^{n-1} + \dots + a_2 * (j\omega)^2 + a_1 * (j\omega) + 1} \quad m \leq n$$

dieses lässt sich umformen mit Hilfe der Nullstellen von Nenner und Zähler, z.B. für $m = 2, n = 3$

$$F(j\omega) = A \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_A}\right) * \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_B}\right)}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) * \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right) * \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_3}\right)}$$

Oberer Frequenzgang lässt sich aufspalten nach Betrag und Phase

$$F = A \frac{\sqrt{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_A}\right)^2} * \sqrt{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_B}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} * \sqrt{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)^2} * \sqrt{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_3}\right)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_A}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_B}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)$$

Mit Hilfe von

$$F(\omega) \text{ und } \varphi(\omega)$$

kann für verschiedene ω -Werte die Ortskurve berechnet werden.

6.7.4.2. Physikalische Ortskurven

Beispiel 1:

Für die Schaltung auf Arbeitsblatt EGII-12 sollen die folgenden Ortskurven konstruiert werden:

- \underline{Z} - Scheinwiderstand
- \underline{Y} - Scheinleitwert
- \underline{I} - Strom
- \underline{U}_2 - Ausgangsspannung
- \underline{S} - Scheinleistung
- \underline{F} - Frequenzgang

Lösung:

$$\underline{Z} = R + j\omega L = R \left(1 + j \frac{\omega}{R/L} \right) = R \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_e} \right) = 10 \Omega \left(1 + j \frac{\omega}{1000 \text{ s}^{-1}} \right)$$

$$\omega_e = \frac{R}{L} = \frac{10 \Omega}{10 \text{ mH}} = 10^3 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R(1 + j\omega/\omega_e)} = 0.1 \text{ S} \frac{1}{1 + j\omega/1000 \text{ s}^{-1}}$$

$$\underline{I} = \underline{U}_q * \underline{Y} = \frac{U_q}{R} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e} = 2 \text{ A} \frac{1}{1 + j\omega/1000 \text{ s}^{-1}}$$

$$\underline{U}_2 = U_q \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = U_q \frac{j\omega/\omega_e}{1 + j\omega/\omega_e} = 20 \text{ V} \frac{j\omega/1000 \text{ s}^{-1}}{1 + j\omega/1000 \text{ s}^{-1}}$$

$$\frac{j\omega}{1 + j\omega} = 1 - \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$\underline{U}_2 = U_q \left(1 - \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e} \right)$$

$$\underline{S} = \underline{U} * \underline{I}^* = \frac{U_q^2}{R} \frac{1}{1 - j\omega/\omega_e} = 40 \text{ VA} \frac{1}{1 - j\omega/1000 \text{ s}^{-1}}$$

$$\underline{F} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{U_q}{U_q} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e} = 1 - \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$$

Die auf Arbeitsblatt EGII-12 dargestellten Ortskurven können mit den Grundlagen aus Kap. 6.7.4.1 und mit oberen Berechnungsergebnissen konstruiert werden.

Diskussion der Ergebnisse:

- a) Der komplexe Widerstand ist eine komplexe Halbgerade. Bei der Eckfrequenz sind Real- und Imaginärteil gleich.
- b) Der komplexe Leitwert ist durch Inversion der komplexen Widerstands-Geraden ein Halbkreis. Der Durchmesser beträgt $1/R$. Ein weiterer markanter Wert ist die Eckfrequenz ω_e .

$$\underline{Y}(\omega = \omega_e) = \frac{1}{\underline{Z}(\omega = \omega_e)} = \frac{1}{R} * \frac{1}{1 + j} = \frac{1}{2R} (1 - j)$$

- c) Da die Spannung den Phasenwinkel 0° aufweist, ergibt sich die komplexe Ortskurve des Stromes durch Multiplikation der Leitwert-Ortskurve mit U_q .
- d) Die Ortskurve der Spannung \underline{U}_R hat die gleiche Form als der Strom:

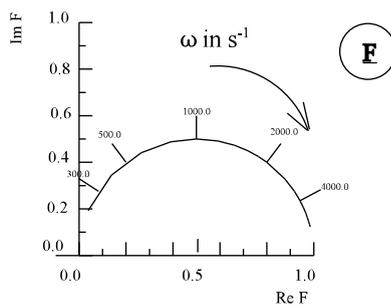
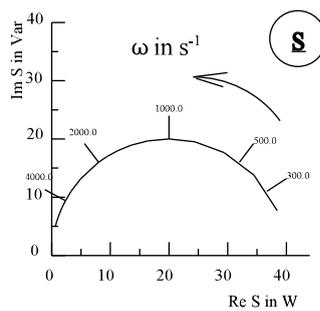
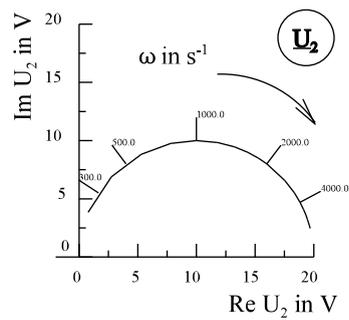
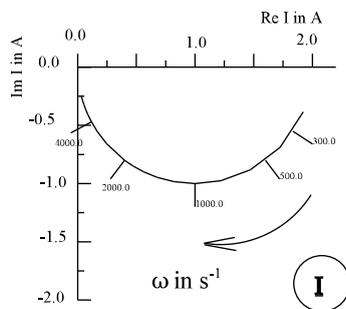
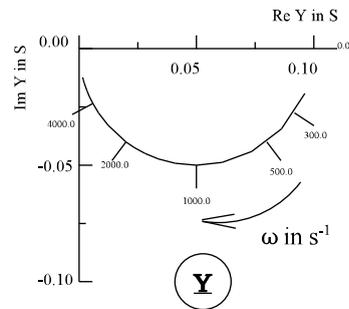
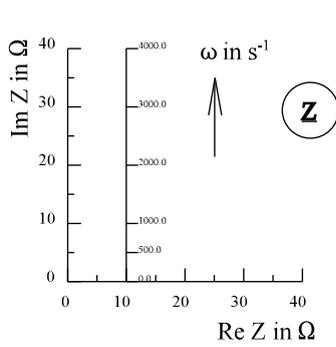
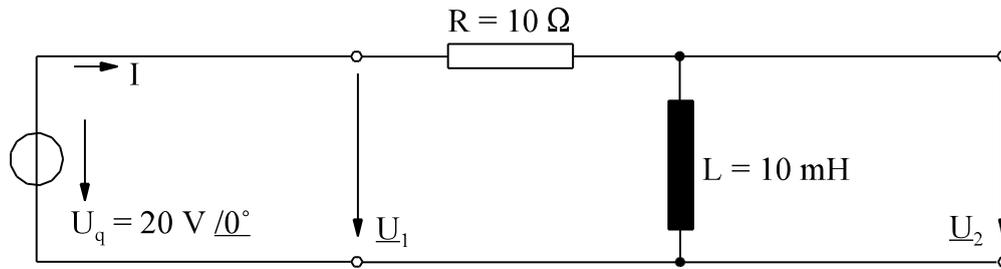
$$\underline{U}_R = R \underline{I}$$

Der Strom wird nur mit dem nicht frequenzabhängigen reellen Parameter R multipliziert. Die Ortskurve \underline{U}_2 ließe sich anschließend bestimmen aus:

$$\underline{U}_2 = U_q - \underline{U}_R$$

- e) Multipliziert man die konjugiert komplexe Ortskurve des Stroms mit U_q erhält man Ortskurve der komplexen Scheinleistung.
- f) Die Ortskurve des Frequenzganges \underline{F} ergibt sich durch Division der Ortskurve der Spannung \underline{U}_2 durch den reellen Parameter U_q . Die Form der Ortskurven \underline{U}_2 und \underline{F} sind daher gleich.

Arbeitsblatt EGII-12



$$\underline{Z} = 10 \Omega \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_e} \right)$$

$$\underline{Y} = \frac{0.1 \text{ S}}{1 + j\omega/\omega_e}$$

$$\omega_e = \frac{R}{L} = 1000 \text{ s}^{-1}$$

$$\underline{I} = \frac{2 \text{ A}}{1 + j\omega/\omega_e}$$

$$\underline{U}_2 = 20 \text{ V} \left(1 - \frac{1}{1 + \omega/\omega_e} \right)$$

$$\underline{S} = \frac{40 \text{ VA}}{1 - j\omega/\omega_e}$$

$$\underline{F} = 1 - \frac{1}{1 + \omega/\omega_e}$$

Beispiel 2: Für die Schaltung auf Arbeitsblatt EGII-13 sollen die folgenden Ortskurven konstruiert werden:

- \underline{Z} - Scheinwiderstand
- \underline{Y} - Scheinleitwert
- \underline{I} - Strom
- \underline{U}_2 - Ausgangsspannung
- \underline{S} - Scheinleistung
- \underline{F} - Frequenzgang

Lösung:

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R \left(1 + j \frac{RC}{\omega} \right) = R \left(1 + \frac{\omega_e}{j\omega} \right) = R \left(1 - j \frac{\omega_e}{\omega} \right)$$

$$\omega_e = \frac{1}{RC} = \frac{1}{10 \Omega * 100 \mu\text{F}} = 1000 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{R} \frac{j\omega/\omega_e}{1 + j\omega/\omega_e}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} \left[1 - \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e} \right] \quad \text{Konstruktion besser über} \quad \underline{Y}(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(\omega)}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{j\omega C} * \underline{I} = \frac{1}{j\omega C} \frac{U_q}{R} * \frac{j\omega * RC}{1 + j\omega/\omega_e} = U_q \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$$

$$\underline{I} = U_q * \underline{Y} = \frac{U_q}{R} \frac{j\omega/\omega_e}{1 + j\omega/\omega_e}$$

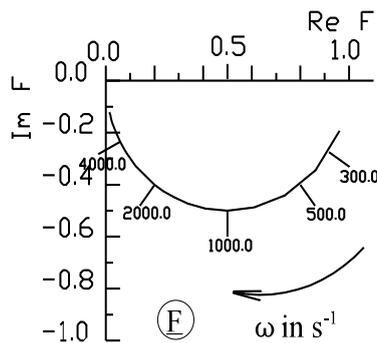
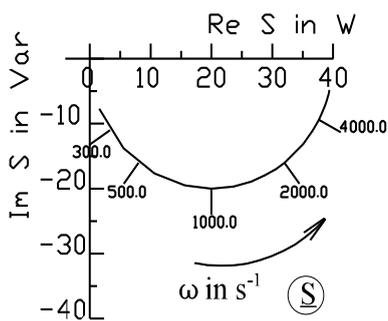
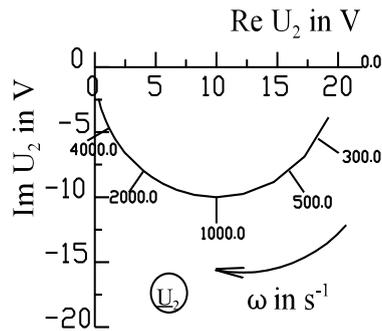
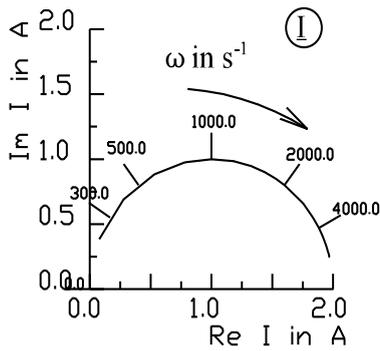
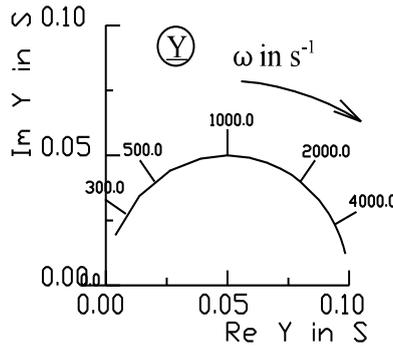
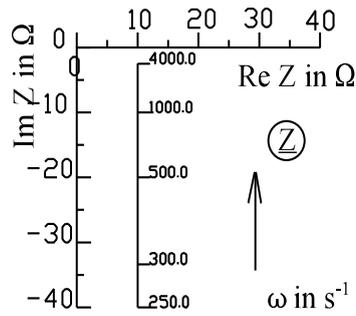
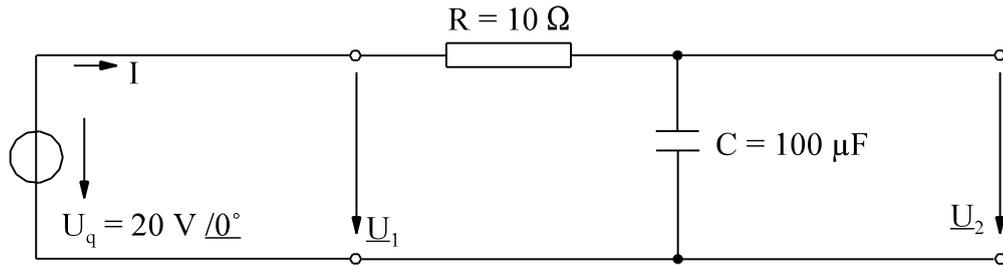
$$\underline{S} = U_q * \underline{I}^* = \frac{U_q^2}{R} \frac{-j\omega/\omega_e}{1 - j\omega/\omega_e}$$

$$\underline{F} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{U_q}{U_q} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$$

Diskussion der Ergebnisse:

- a) Die Ortskurve des Widerstandes ist eine Gerade mit nichtlinearer Teilung.
- b) Die Ortskurve des Scheinleitwertes kann aus der berechneten Formel konstruiert werden. Einfacher allerdings ist, die Ortskurve des Scheinwiderstandes zu invertieren, weil die Invertierung einer Geraden keine Schwierigkeiten bereiten sollte.
- c bis e) Wie bei R-L ergeben sich die Ortskurven durch Operationen auf schon bekannte Ortskurven.

Arbeitsblatt EGII-13



$$\underline{Z} = 10 \Omega \left(1 - j \frac{1}{\omega/\omega_e} \right)$$

$$\underline{Y} = 0.1 S \frac{j\omega/\omega_e}{1 + j\omega/\omega_e}$$

$$\omega_e = \frac{1}{R \cdot C} = 1000 \frac{1}{s}$$

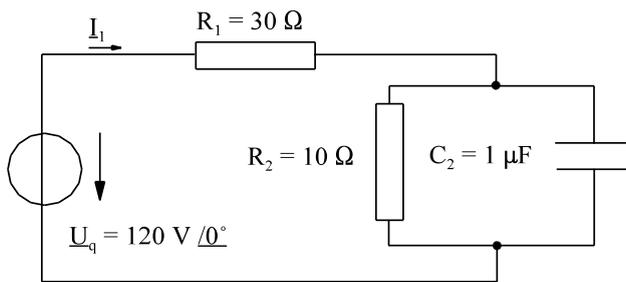
$$\underline{I} = 2 A \frac{j\omega/\omega_e}{1 + j\omega/\omega_e}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{20V}{1 + j\omega/\omega_e}$$

$$\underline{S} = 40 VA \frac{-j\omega/\omega_e}{1 - j\omega/\omega_e}$$

$$\underline{F} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$$

Beispiel 3 Klausur EG2 03.07.99 SS 99 Aufgabe 3



Die folgenden Ortskurven der dargestellten Schaltung sollen konstruiert werden. Geben Sie (wenn möglich) in jeder Skizze einer Ortskurve zwei ω -Werte an.

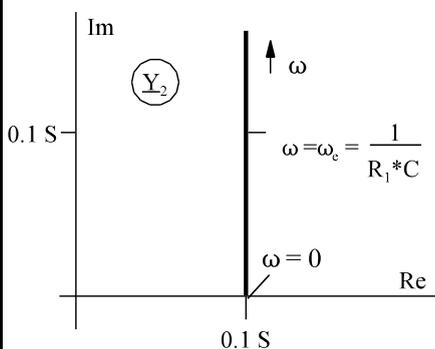
- a) Ortskurve $\underline{Y}_2(\omega)$
- b) Ortskurve $\underline{Z}_2(\omega)$
- c) Ortskurve $\underline{Z}_{ges}(\omega)$
- d) Ortskurve $\underline{Y}_{ges}(\omega)$
- e) Ortskurve $\underline{I}_1(\omega)$

Lösungsweg:

a) Ortskurve $\underline{Y}_2(\omega)$

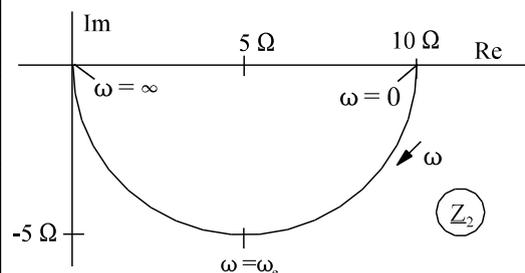
$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_1} + j\omega * C = \frac{1}{10\Omega} + j\omega * C$$

$$\underline{Y}_2 = 0.1 \text{ S} + j\omega * C$$



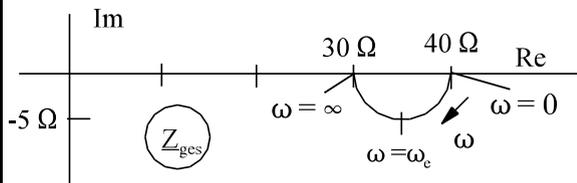
b) Ortskurve $\underline{Z}_2(\omega)$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2} \quad \frac{1}{0.1 \text{ S}} = 10 \Omega$$



c) Ortskurve $\underline{Z}_{ges}(\omega)$

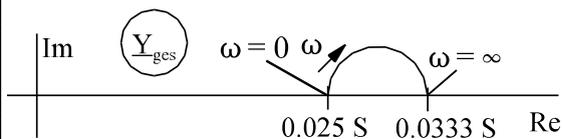
$$\underline{Z}_{ges} = \underline{Z}_2 + 30 \Omega \quad 10 \Omega + 30 \Omega = 40 \Omega$$



d) Ortskurve $\underline{Y}_{ges}(\omega)$

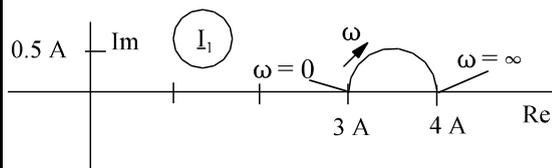
$$\underline{Y}_{ges} = \frac{1}{\underline{Z}_{ges}}$$

$$\frac{1}{30 \Omega} = 0.0333 \text{ S} \quad \frac{1}{40 \Omega} = 0.025 \text{ S}$$



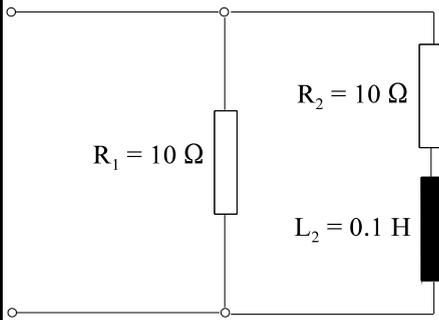
e) Ortskurve $\underline{I}_1(\omega)$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{ges} * 120 \text{ V} \quad 0.0333 \text{ S} * 120 \text{ V} = 4 \text{ A} \quad 0.025 \text{ S} * 120 \text{ V} = 3 \text{ A}$$



Beispiel 4

Klausur EG2 08.07.96 SS 96 Aufgabe 4



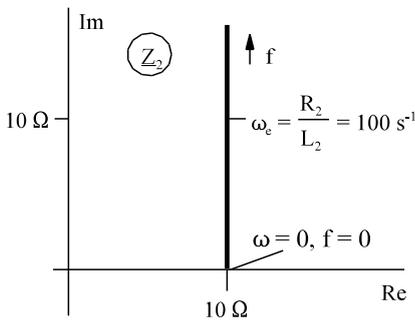
Die Ortskurve mit der Frequenz als Parameter des komplexen Gesamtwidestandes der dargestellten Schaltung soll konstruiert werden. Geben Sie (wenn möglich) in jeder Skizze einer Ortskurve die Werte für $f = 0$ und $f \rightarrow \infty$ an.

- a) Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Z}_2 .
- b) Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Y}_2 .
- c) Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Y}_{ges} .
- d) Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Z}_{ges} .

Lösungsweg:

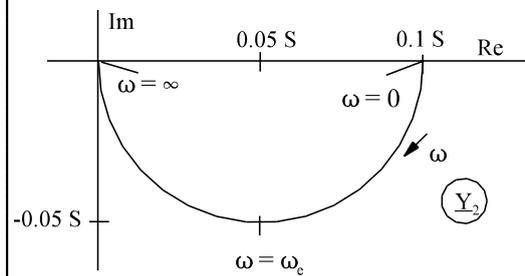
a) Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Z}_2 .

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega \cdot L_2 = 10 \Omega + j\omega \cdot L_2$$



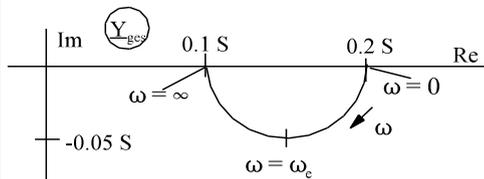
b) Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Y}_2 .

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} \quad \frac{1}{10 \Omega} = 0.1 S \text{ für } \omega = 0$$



c) Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Y}_{ges} .

$$\underline{Y}_{ges} = \underline{Y}_2 + \frac{1}{R_1} = \underline{Y}_2 + 0.1 S$$

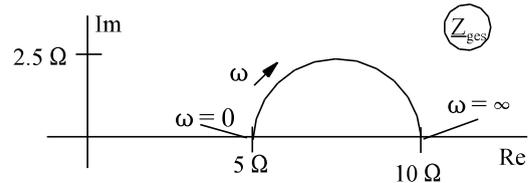


d) Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Z}_{ges} .

$$\underline{Z}_{ges} = \frac{1}{\underline{Y}_{ges}}$$

$$\omega = 0 \quad \underline{Y}_{ges} = 0.2 S \quad \underline{Z}_{ges} = 5 \Omega$$

$$\omega \approx \infty \quad \underline{Y}_{ges} = 0.1 S \quad \underline{Z}_{ges} = 10 \Omega$$

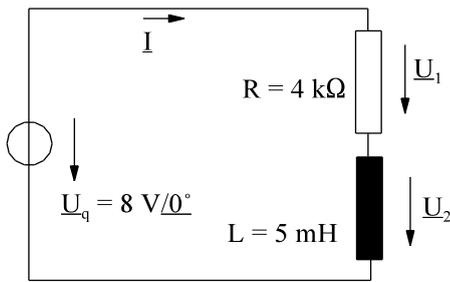


6.7.4.3. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 6.7.4

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.6.7.4.A	Die Inversion einer komplexen Geraden durch Null als Ortskurve ergibt: * Gerade durch Null * Gerade nicht durch Null * Parabel durch Null * Parabel nicht durch Null * Kreis durch Null * Kreis nicht durch Null	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.4.B	Die Inversion einer komplexen Geraden nicht durch Null als Ortskurve ergibt: * Gerade durch Null * Gerade nicht durch Null * Parabel durch Null * Parabel nicht durch Null * Kreis durch Null * Kreis nicht durch Null	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.4.C	Die Inversion eines komplexen Kreises durch Null als Ortskurve ergibt: * Gerade durch Null * Gerade nicht durch Null * Parabel durch Null * Parabel nicht durch Null * Kreis durch Null * Kreis nicht durch Null	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.4.D	Die Inversion eines komplexen Kreises nicht durch Null als Ortskurve ergibt: * Gerade durch Null * Gerade nicht durch Null * Parabel durch Null * Parabel nicht durch Null * Kreis durch Null * Kreis nicht durch Null	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.4.E	Die Inversion einer komplexen Parabel als Ortskurve ergibt: * Gerade durch Null * Gerade nicht durch Null * Parabel durch Null * Parabel nicht durch Null * Kreis durch Null * Kreis nicht durch Null	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Frage 6.7.4.A Die Inversion einer komplexen Geraden durch Null als Ortskurve ergibt: _____
Frage 6.7.4.B Die Inversion einer komplexen Geraden nicht durch Null als Ortskurve ergibt: _____
Frage 6.7.4.C Die Inversion eines komplexen Kreise durch Null als Ortskurve ergibt: _____
Frage 6.7.4.D Die Inversion eines komplexen Kreises nicht durch Null als Ortskurve ergibt: _____
Frage 6.7.4.E Geben Sie die allgemeine Form von Geraden und Kreisen als Ortskurve an: _____

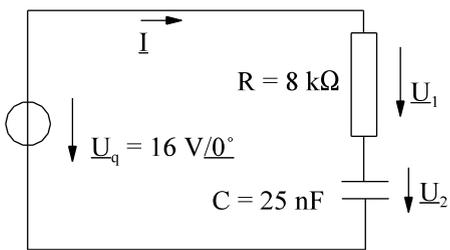
Aufgabe 6.7.4.A



- Stellen Sie die Ortskurve $\underline{Z}(\omega)$ dar.
- Stellen Sie die Ortskurve $\underline{Y}(\omega)$ dar.
- Stellen Sie die Ortskurve $\underline{I}(\omega)$ dar.
- Stellen Sie die Ortskurve $\underline{U}_1(\omega)$ dar.
- Stellen Sie die Ortskurve $-\underline{U}_1(\omega)$ dar.
- Stellen Sie die Ortskurve $\underline{U}_2(\omega)$ dar.
- Stellen Sie die Ortskurve $\underline{S}(\omega)$ dar.

Kennzeichnen Sie bei jeder Ortskurve drei signifikante Frequenzen (Kreisfrequenzen).

Aufgabe 6.7.4.B

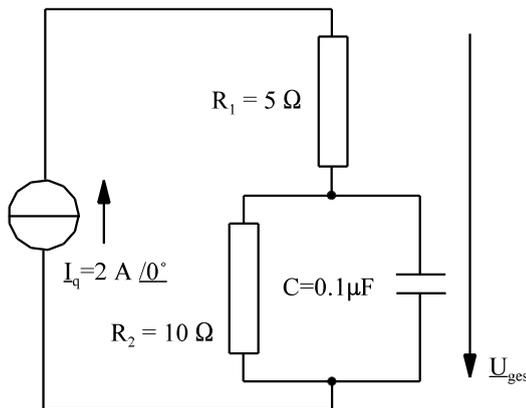


- Stellen Sie die Ortskurve $\underline{Z}(\omega)$ dar.
- Stellen Sie die Ortskurve $\underline{Y}(\omega)$ dar.
- Stellen Sie die Ortskurve $\underline{I}(\omega)$ dar.
- Stellen Sie die Ortskurve $\underline{U}_1(\omega)$ dar.
- Stellen Sie die Ortskurve $-\underline{U}_1(\omega)$ dar.
- Stellen Sie die Ortskurve $\underline{U}_2(\omega)$ dar.
- Stellen Sie die Ortskurve $\underline{S}(\omega)$ dar.

Kennzeichnen Sie bei jeder Ortskurve drei signifikante Frequenzen (Kreisfrequenzen).

Aufgabe 6.7.4.C

Klausur EG2 24.1.2002 WS 2001/2002 Aufgabe 4

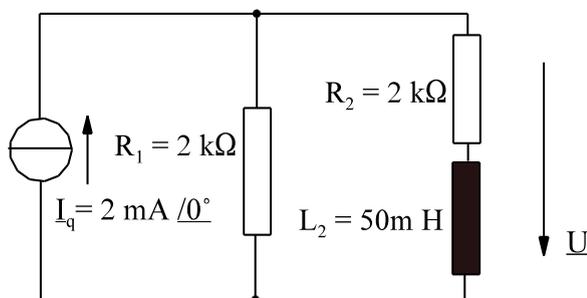


Die Ortskurve mit der (Kreis-)Frequenz als Parameter der komplexen Gesamtspannung der links dargestellten Schaltung soll konstruiert werden. Geben Sie (wenn möglich) in jeder Skizze einer Ortskurve die Werte für $f = 0$ ($\omega = 0$), $f = f_c$ ($\omega = \omega_c$) und $f \rightarrow \infty$ ($\omega \rightarrow \infty$) an.

Bestimmen Sie den Wert für f_c bzw. ω_c .

- Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Y}_2 .
- Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Z}_2 .
- Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Z}_{ges} .
- Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{U}_{ges} .

Aufgabe 6.7.4.D

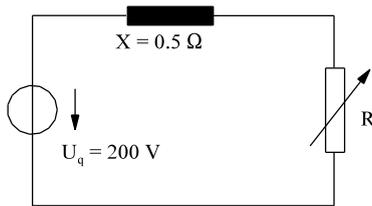


Die Ortskurve mit der Frequenz als Parameter der komplexen Leistung der dargestellten Schaltung soll konstruiert werden. Geben Sie (wenn möglich) in jeder Skizze einer Ortskurve die Werte für $f = 0$ und $f \rightarrow \infty$ an.

- Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Z}_2 .
- Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Y}_2 .
- Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Y}_{ges} .
- Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{Z}_{ges} .
- Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{U} .
- Skizzieren Sie die Ortskurve von \underline{S} .

Aufgabe 6.7.4.E

In der Elektrowärme wird der Wirkwiderstand variiert, siehe untere Skizze. Die Frequenz ist mit $f = 50$ Hz konstant. Die Leistungs-Ortskurve (der Quelle) $\underline{S}(R) = P + jQ$ ist zu konstruieren.



Die einzelnen Aufgaben:

- Skizzieren Sie die Ortskurve des komplexen Widerstandes $\underline{Z}(R)$.
- Skizzieren Sie die Ortskurve des komplexen Leitwertes $\underline{Y}(R)$.
- Skizzieren Sie die Ortskurve des komplexen Stromes $\underline{I}(R)$.
- Skizzieren Sie die Ortskurve der komplexen Leistung $\underline{S}(R)$ der Spannungsquelle.
- Lesen Sie aus der Ortskurve ab, bei welchem Widerstand R_{\max} , die Wirkleistung P_{\max} wird. Wie groß ist P_{\max} ? Geben Sie bei jeder Ortskurve drei signifikante Werte von R an.

Hinweis: Im Normalfall wird bei der Ortskurvendarstellung die Frequenz f (Kreisfrequenz ω) als Parameter aufgetragen; hier wird der Widerstand variiert.

6.7.5. Filter

Filter haben die Aufgabe, bestimmte Frequenzen zu unterdrücken und andere Frequenzbereiche aus einem Gesamtsignal herauszuheben.

6.7.5.1. Einteilung

Einteilen lassen sich die Filter u.a. nach:

- Digitale und analoge Filter
- Tiefpass, Hochpass, Bandpass
- Schmalband- und Breitbandfilter

Digitale und analoge Filter: Digitale Filter werden mit digitalen Schaltungen (z.B. TTL, Signalprozessoren, Rechnern) realisiert und sollen in Grundlagen der Elektrotechnik nicht behandelt werden. Analoge Filter werden mit Induktivitäten, Kapazitäten, Widerständen und Verstärkern aufgebaut.

Tiefpass: Ein Tiefpass lässt die tiefen Frequenzen durch und sperrt die hohen.

Hochpass: Ein Hochpass hat das entgegengesetzte Verhalten zum Tiefpass. Er lässt die hohen Frequenzen durch und sperrt die tiefen.

Bandpass: Schaltet man einen Hochpass und einen Tiefpass in Reihe und dimensioniert die Eckfrequenzen so, dass die des Hochpasses niedriger liegen als die des Tiefpasses, sperrt bei tiefen Frequenzen der Hochpass und bei hohen Frequenzen sperrt der Tiefpass. Nur bei mittleren Frequenzen können die Signale passieren.

Breitbandfilter: Ein Bandpass, wo ein großer Frequenzbereich das Filter passiert, wird Breitbandfilter genannt.

Schmalbandfilter: Diese dienen zur Herausfilterung sehr schmaler Frequenzbänder.

Realisierung von Filtern: HP, TP, Breitband: RC-Schaltungen
Schmalband: LC-Schaltungen

Hinweis: Jedes Bauelement und insbesondere jeder Verstärker hat eine obere Grenzfrequenz, weil bei sehr hohen Frequenzen jedes Bauelement parasitäre Elemente enthält. Beispiel: Die Zuleitung des Kondensators wirkt als Induktivität.

6.7.5.2. Grenzfrequenz und Bandbreite

Die Grenzfrequenz wird definiert als Frequenz wo die Übertragungsfunktion um $\sqrt{2}$ vom Maximum abweicht

$$f_{\text{grenz}} \quad \Rightarrow \quad \frac{F(\omega)}{F_{\text{max}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Im logarithmischen Maß:

$$20 \text{ dB} * 1g\left(\frac{F(\omega)}{F_{\text{max}}}\right) = 20 \text{ dB} * 1g\frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$$

Merke: $\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{=} -3 \text{ dB}$

Unterscheidung:

$f_{\text{grenz unten}}$	-	untere Grenzfrequenz
$f_{\text{grenz obere}}$	-	obere Grenzfrequenz

Bandbreite:

Definition: $f_{\text{Band}} = f_{\text{grenz oben}} - f_{\text{grenz unten}}$

Werden Gleichsignale ($f = 0$) übertragen, beträgt untere Grenzfrequenz ($f_{\text{grenz unten}} = 0$) Null.

Eine obere Grenzfrequenz ist immer durch parasitäre Elementen vorhanden.

6.7.5.3. Bode-Diagramm

Analoge Filter weisen Wechselstrom-Charakteristiken auf. Diese sind komplex darstellbar, also nach Betrag und Phase. Bei Filtern ist der komplexe Frequenzgang von Interesse:

$$\underline{F} = F * e^{j\varphi}$$

Logarithmiert man F erhält man

$$\ln(F) = \ln(F * e^{j\varphi}) = \ln(F) + j\ln(e^{j\varphi})$$

$$\ln(\underline{F}) = \ln(F) + j\varphi$$

Durch das Logarithmieren wird der Frequenzgang zerlegt in

Realteil	$\hat{=}$	Logarithmus vom Betrag des Frequenzganges
Imaginärteil	$\hat{=}$	Winkel des Frequenzganges

Darzustellen in einem Diagramm ist danach

- logarithmisch der Betrag und
- linear der Winkel.

Für den Betrag ist die in Kap. 6.7.2 eingeführte Angabe in dB üblich

$$F_{\text{dB}} = 20 \text{ dB} * 1g(F) = 20 \text{ dB} * 1g\frac{U_2}{U_1}$$

Im Bode Diagramm werden die zwei Komponenten

- F_{dB}
- φ

in Abhängigkeit der Kreisfrequenz (oder Frequenz) aufgetragen. Die Darstellung erfolgt untereinander, mit gleicher Abszissen (ω)-Skalierung. Die ω -Achse erhält eine logarithmische Skalierung, weil weite Frequenzbereiche von Interesse sind.

Dadurch ergibt sich für die Darstellung $F_{\text{dB}}(\omega)$ eine doppelt logarithmische Skalierung, weil F_{dB} schon ein logarithmisches Maß ist. Die Darstellung $\varphi(\omega)$ ist halblogarithmisch.

Für Handskizzen empfiehlt sich halb logarithmisches Papier.

Für die Grenzfälle hoher und tiefer Frequenzen ergeben sich für den Betrag die Asymptoten:

tiefe Frequenz	hohe Frequenz
$\omega \ll \omega_e$	$\omega \gg \omega_e$
$1 \gg \omega/\omega_e$	$1 \ll \omega/\omega_e$
$F = 1$	$F = \frac{1}{\omega/\omega_e}$
$F_{dB} = 0$	$F(\omega_e) = 1$
Steigung: 0	Steigung: -20 dB/Dekade

Für die obigen Grenzfälle (Asymptoten) sind Potenzfunktion vorhanden, die im doppelt logarithmischen Maßstab Geraden darstellen, die als Asymptoten den Verlauf annähern, siehe Arbeitsblatt EGII-14. Wo sich die Asymptoten schneiden, ist die Eckkreisfrequenz vorhanden, siehe oberes ω_e . Dort ist die größte Abweichung zwischen Asymptoten und exaktem Verlauf, siehe Arbeitsblatt EGII-14. Die Dämpfung beträgt an dieser Stelle

$$F_{dB} = 20 \text{ dB} * 1g \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = -3 \text{ dB}$$

In diesem Fall (Filter 1. Ordnung) ist die Eckfrequenz auch die Grenzfrequenz:

$$f_{\text{grenz}} = f_e = \frac{\omega_e}{2\pi}$$

Der Verlauf des Phasenganges wird durch drei Geraden angenähert, siehe Arbeitsblatt EGII-14

Konstruktionshinweise

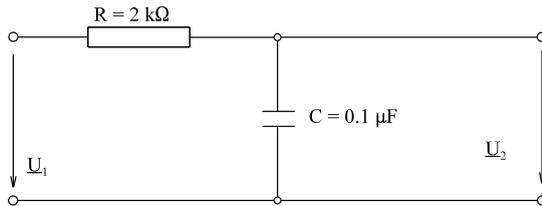
- Am besten eignet sich halblogarithmisches Millimeterpapier, weil der Winkel linear aufgetragen wird. Auch F_{dB} wird halblogarithmisch aufgetragen. Die Funktion $F(\omega)$ wird durch den Übergang $F - F_{dB}$ aber doppelt logarithmisch dargestellt.
- F_{dB} und φ in Grad werden linear aufgetragen.
- Die Kreisfrequenz ω (evtl. auch die Frequenz f) wird logarithmisch aufgetragen.
- Die Eckfrequenz $\omega_e = 1/(R*C)$ etwa in die Mitte legen.
- Für den Betrag F_{dB} bis $\omega = \omega_e$ die Gerade $F = 0 \text{ dB}$ einzeichnen.
- Für $\omega \geq \omega_e$ eine Gerade einzeichnen mit den Punkten

$F = 0 \text{ dB}$	für $\omega = \omega_e$
$F = -20 \text{ dB}$	für $\omega = 10\omega_e$
- Für den Phasenwinkel 3 Geraden einzeichnen

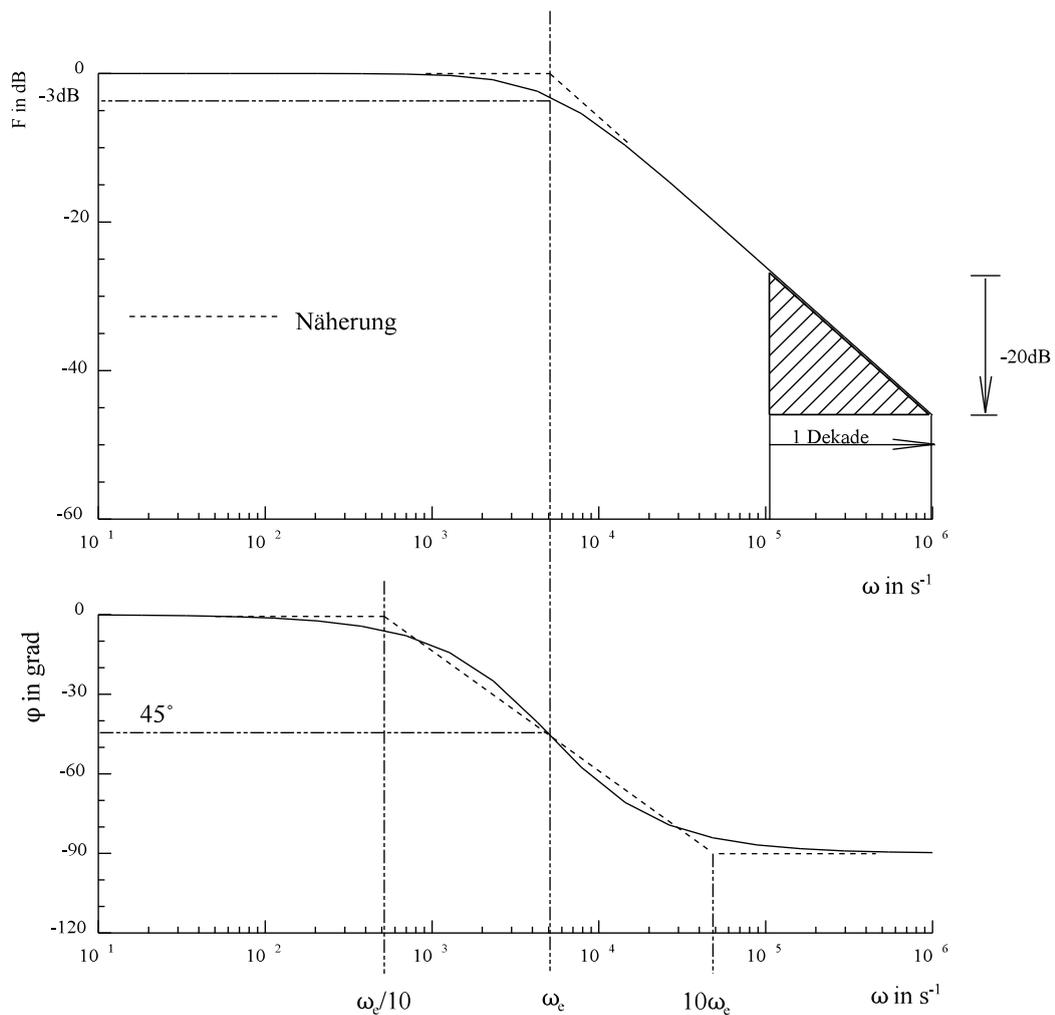
1. Gerade:	$\varphi = 0^\circ \omega \leq \omega_e/10$
2. Gerade:	$\varphi = -90^\circ \omega \geq 10\omega_e$
3. Gerade:	Enden der Geraden 1 und 2 verbinden

Arbeitsblatt EGII-14:

Tiefpass 1. Ordnung



$$\omega_e = \frac{1}{R \cdot C} = 5000 \frac{1}{s} \quad f_{gr} = 795.8 \text{ Hz}$$



$$\underline{F}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_e}}$$

$$F_{dB} = 20 \text{ dB} * \lg \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_e)^2}} \quad \varphi = -\arctan(\omega/\omega_e)$$

Das Verhalten der folgenden Schaltung soll untersucht werden und im Bode Diagramm dargestellt werden. Um welche Art von Schaltung handelt es sich?

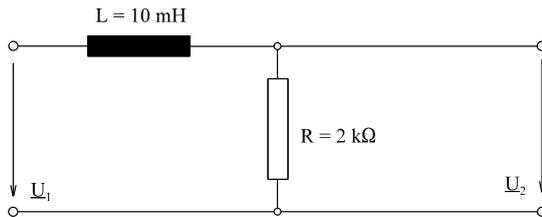


Bild EG6754C

$$\underline{F} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{R/L}}$$

$$\omega_e = \frac{R}{L} = \frac{2 \text{ k}\Omega}{10 \text{ mH}} = 200 * 10^3 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\underline{F} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_e}}$$

Damit hat \underline{F} die gleich Form als bei der vorigen Schaltung und ist auch ein Tiefpaß.

Test dazu

$$\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 1$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad F = 0$$

Konstruktion kann mit den obigen Hinweisen erfolgen.

6.7.5.5. Hochpass 1.Ordnung

Der Frequenzgang der Schaltung nach Arbeitsblatt EGII-15 soll untersucht werden. Nach der Spannungsteilerregel ergibt sich:

$$\underline{F} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Mit der Eckkreisfrequenz $\omega_e = \frac{1}{RC} \quad \omega_e = \frac{1}{2.5 \mu F * 2 k\Omega} = 200 \frac{1}{s}$

ergibt sich:

$$\underline{F} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_e}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_e}}$$

Aus \underline{F} kann Betrag und Phase angegeben werden:

$$F = \frac{\omega / \omega_e}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_e)^2}} \quad \varphi = 90^\circ - \arctan(\omega / \omega_e)$$

$$F_{dB} = 20 dB * 1g \frac{\omega / \omega_e}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_e)^2}}$$

Für die Grenzfälle hoher und tiefer Frequenzen ergeben sich für den Betrag die Asymptoten:

tiefe Frequenz $\omega < \omega_e$	hohe Frequenz $\omega > \omega_e$
$1 \gg \omega / \omega_e$	$1 \ll \omega / \omega_e$
$F = \omega / \omega_e$	$F = 1$
$F(\omega_e) = 1$	$F_{dB} = 0$
$F_{dB}(\omega_e) = 0$	
Steigung: 20 dB/Dekade	Steigung: 0

Für die obigen Grenzfälle sind Potenzfunktion vorhanden, im doppelt logarithmischen Maßstab damit Geraden, die als Näherung auf Arbeitsblatt EGII-15 aufgetragen sind. An der Stelle $\omega = \omega_e$ ergibt sich die Dämpfung F_{dB} :

$$F_{dB} = 20 \text{ dB} * 1g \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = -3 \text{ dB}$$

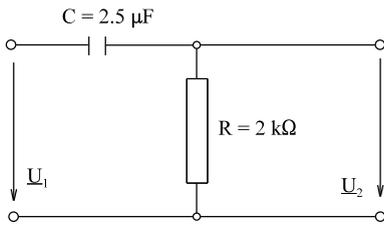
Hier (Filter 1.Ordnung) ist die Eckfrequenz auch die Grenzfrequenz, aber hier die untere Grenzfrequenz:

$$f_{\text{grenz}} = f_e = \frac{\omega_e}{2\pi}$$

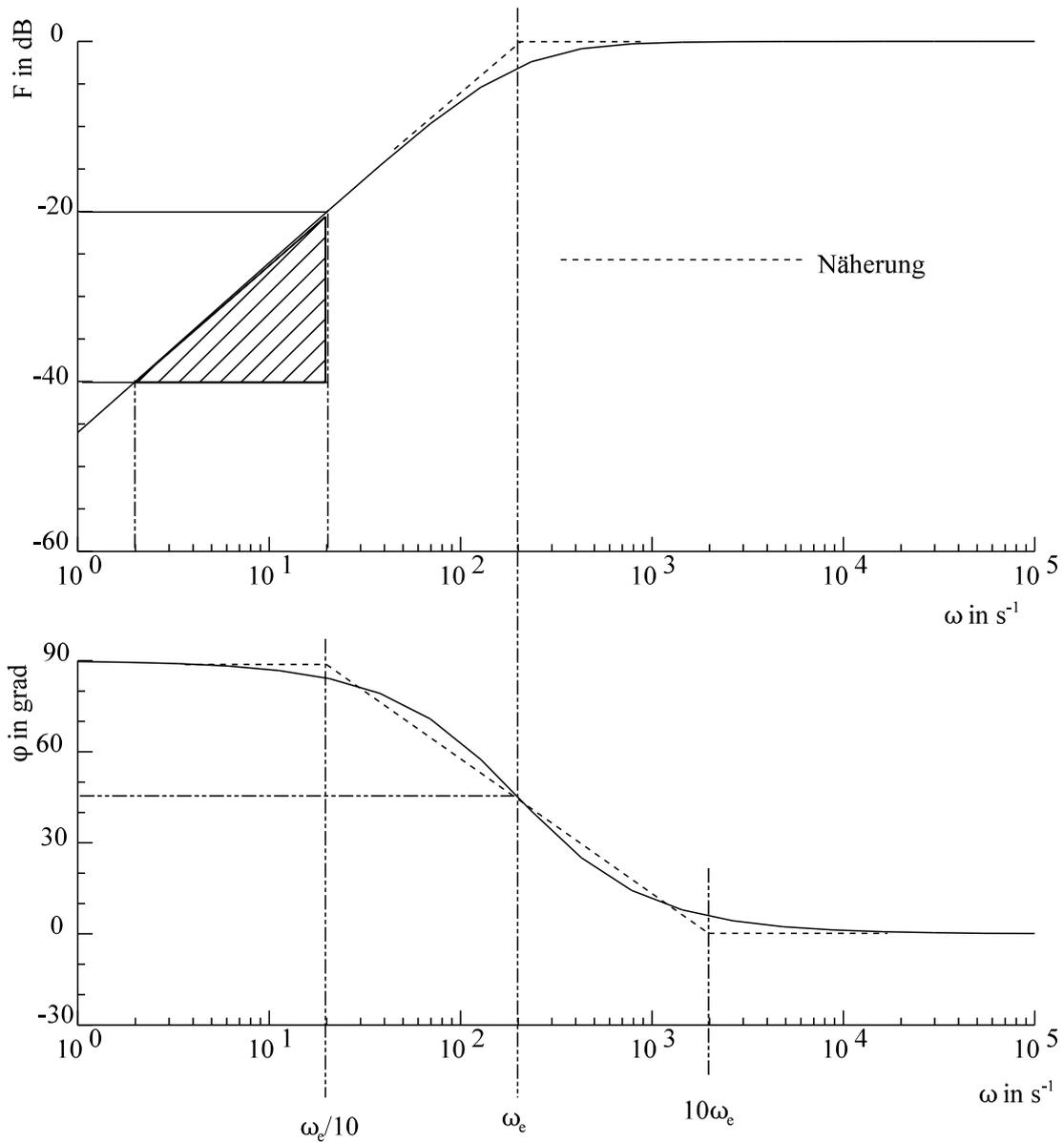
Der Verlauf des Phasenganges kann wieder durch drei Geraden angenähert, siehe Arbeitsblatt EGII-15.

Arbeitsblatt EGII-15:

Hochpass 1. Ordnung



$$\omega_e = \frac{1}{RC} = 200 \frac{1}{s} \quad f_{gr} = 31.83 \text{ Hz}$$



$$\underline{F}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_e}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_e}} \quad F_{dB} = 20dB * \lg \frac{\omega/\omega_e}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_e)^2}}$$

$$\varphi = 90^\circ - \arctan(\omega/\omega_e)$$

Hinweis:

Auch die Schaltung

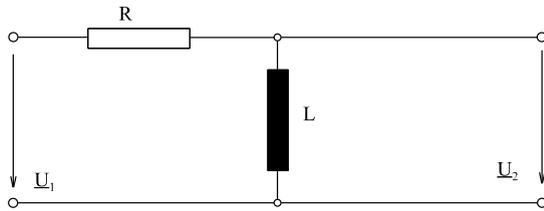


Bild EG6755C

führt zu einem Hochpass

$$\underline{F} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega L/R}{1 + j\omega L/R} = \frac{j \frac{\omega}{R/L}}{1 + j \frac{\omega}{R/L}}$$

$$\omega_e = \frac{R}{L}$$

$$\underline{F} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_e}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_e}}$$

Damit hat \underline{F} die gleiche Form als bei der R-C-Schaltung und wirkt als Hochpaß.

6.7.5.6. Bandpass

Der Frequenzgang der Schaltung nach Arbeitsblatt EGII-16 soll berechnet werden. Zur Vereinfachung ist ein idealer Verstärker zur Entkopplung dazwischen geschaltet. Durch Erweiterung ergibt sich der Frequenzgang aus einem Produkt von Einzelfrequenzgängen:

$$\underline{F} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_1} * \frac{U_4}{U_3} * \frac{U_2}{U_4} = \underline{F}_1 * \underline{F}_2 * \underline{F}_3$$

Die Einzelfrequenzgänge sind schon aus den vorhergehenden Kapiteln bekannt. bzw. ist die Verstärkung gegeben

$$\underline{F}_1 = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{e1}}} \quad \omega_{e1} = \frac{1}{R_1 * C_1} \quad \rightarrow \text{Tiefpass}$$

$$\underline{F}_2 = 10 \quad F_2^{\text{dB}} = 20 \text{ dB} * \lg(10) = 20 \text{ dB}$$

$$\underline{F}_3 = \frac{j \frac{\omega}{\omega_{e3}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{e3}}} \quad \omega_{e3} = \frac{1}{R_3 * C_3} \quad \rightarrow \text{Hochpass}$$

Die Konstruktion der Einzelfrequenzgänge sollte bekannt sein. Das Problem ist, wie erhält man aus den Einzelfrequenzgängen den resultierenden Frequenzgang? Dazu wird Phase und Betrag einzeln betrachtet:

$$\underline{F} = \underline{F}_1 * e^{j\varphi_1} * \underline{F}_2 * e^{j\varphi_2} * \underline{F}_3 * e^{j\varphi_3} = \underline{F}_1 * \underline{F}_2 * \underline{F}_3 * e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)}$$

Der resultierende Betrag ergibt sich aus dem Produkt der Einzelbeträge und der resultierende Winkel aus der Summe der Einzelwinkel:

$$F = F_1 * F_2 * F_3 \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

Im Bode Diagramm wird der Betrag in dB dargestellt. Logarithmieren des Betrages ergibt:

$$F_{\text{dB}} = 20 \text{ dB} * [\lg(F_1 * F_2 * F_3)] = 20 \text{ dB} * \lg(F_1) + 20 \text{ dB} * \lg(F_2) + 20 \text{ dB} * \lg(F_3)$$

$$F_{\text{dB}} = F_1^{\text{dB}} + F_2^{\text{dB}} + F_3^{\text{dB}}$$

In logarithmischer Darstellung (F_{dB}) ist die Multiplikation der Beträge auf eine Additionen zurückgeführt. Damit können sowohl Betrag als auch Winkel der Einzelfrequenzgänge im Bodediagramm addiert werden.

Konstruktion Gesamtfrequenzgang

- Einzelfrequenzgänge durch Geraden annähern
- Geraden der Einzelfrequenzgänge abschnittsweise addieren zum Gesamtfrequenzgang.

Berechnung der Bandbreite

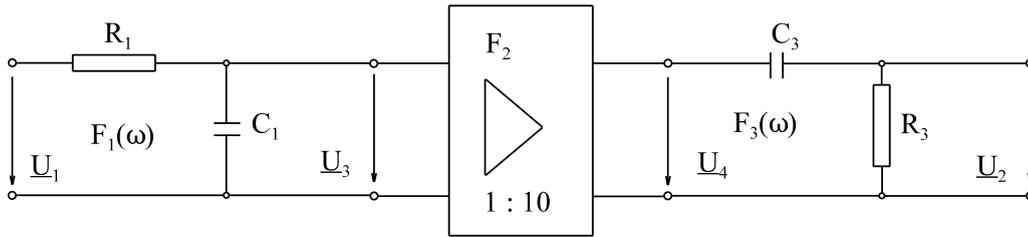
Bei den Eckfrequenzen ω_{e1} und ω_{e2} ist der Betrag jeweils um 3 dB verringert. Damit sind zwei Grenzfrequenzen vorhanden:

$$f_{\text{gr unten}} = \frac{\omega_{e2}}{2\pi} = 318 \text{ Hz} \quad f_{\text{gr oben}} = \frac{\omega_{e1}}{2\pi} = 12.7 \text{ Hz}$$

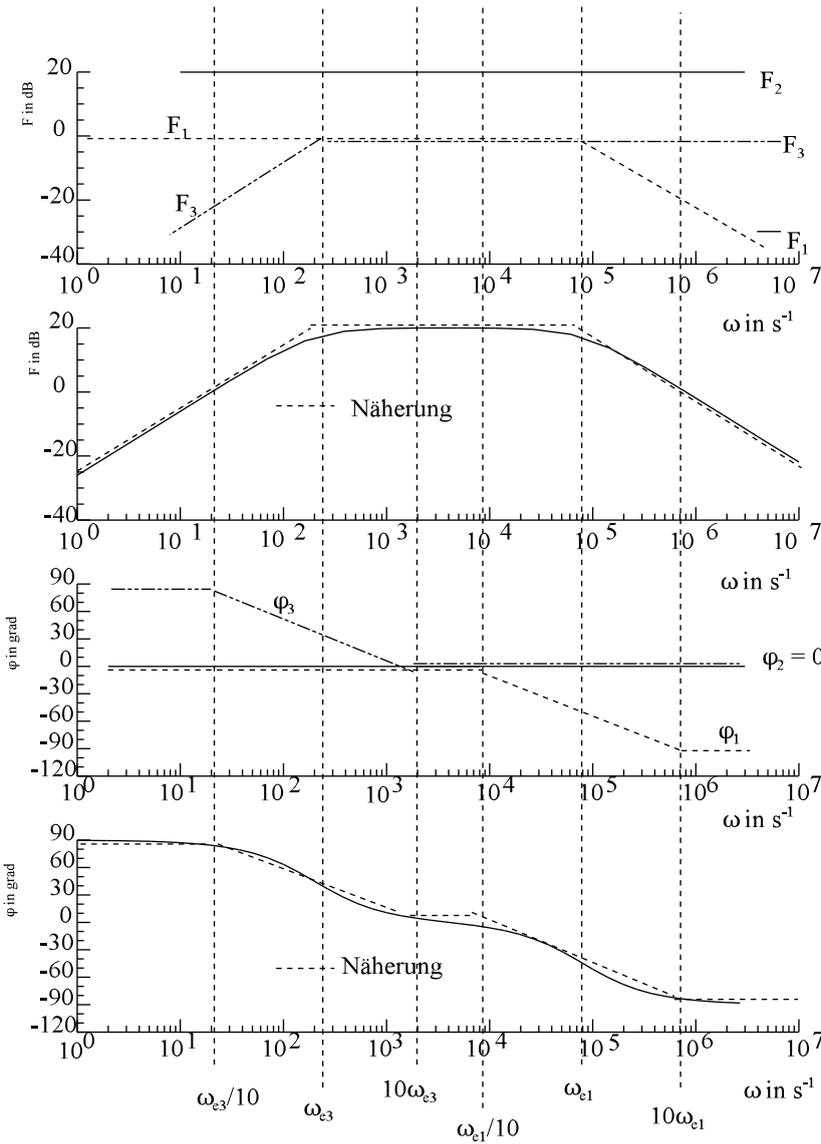
$$\text{Damit ergibt sich die Bandbreite} \quad f_{\text{Band}} = f_{\text{gr oben}} - f_{\text{gr unten}} = 12.7 \text{ kHz}$$

Arbeitsblatt EGII-16:

Bandpass



$$\omega_{e3} = \frac{1}{R_3 * C_3} = 200 \frac{1}{s} \quad \omega_{e1} = \frac{1}{R_1 * C_1} = 80 * 10^3 \frac{1}{s}$$



$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\omega_{e1}} * 10 * \frac{j\omega\omega_{e3}}{1 + j\omega\omega_{e3}}$$

$$F_{dB} = 20 \text{ dB} * 1g \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{e1})^2}} + 20 \text{ dB} + 20 \text{ dB} * 1g \frac{\omega/\omega_{e3}}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{e3})^2}}$$

$$\varphi = -\arctan(\omega/\omega_{e1}) + 90^\circ - \arctan(\omega/\omega_{e3})$$

6.7.5.7. Tiefpass 2.Ordnung

Der Frequenzgang der verkoppelten Reihenschaltung zweier Tiefpässe nach Arbeitsblatt EGII-17 soll bestimmt und im Bode-Diagramm dargestellt werden.

Der Frequenzgang wird aufgeteilt in

$$F = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_1} * \frac{U_2}{U_3} = \underline{F}_1 * \underline{F}_2$$

$$\underline{F}_1 = \frac{U_3}{U_1} \qquad \underline{F}_2 = \frac{U_2}{U_3}$$

Der Frequenzgang F_2 ist der eines einfachen Tiefpass nach Kap. 6.7.5.4 in der Schreibweise der Übertragungsfunktion in p :

$$F_2 = \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{1 + (p/\omega_e)}$$

mit der Eckfrequenz

$$\omega_e = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1 \text{ k}\Omega * 1 \text{ }\mu\text{F}} = 1000 \frac{1}{\text{s}}$$

Die Übertragungsfunktion F_1 lässt sich nach der Spannungsteilerregel bestimmen:

$$F_1 = \frac{Z_3(p)}{R + Z_3(p)} = \frac{1}{RY_3(p) + 1}$$

mit

$$Y_3(p) = pC \parallel \frac{1}{R + \frac{1}{pC}}$$

$$Y_3(p) = pC + \frac{pC}{1 + pRC}$$

$$Y_3(p) = \frac{pC + pCpRC + pC}{1 + pRC} = \frac{1}{R} \frac{2pRC + (pRC)^2}{1 + pRC}$$

$$R * Y_3(p) + 1 = \frac{2pRC + (pRC)^2}{1 + pRC} + 1 = \frac{2pRC + (pRC)^2 + 1 + pRC}{1 + pRC}$$

$$F_1(p) = \frac{1}{RY_3(p) + 1} = \frac{1 + pRC}{(pRC)^2 + 3(pRC) + 1}$$

$$F(p) = F_1(p) * F_2(p) = \frac{1 + pRC}{(pRC)^2 + 3pRC + 1} * \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{(pRC)^2 + 3pRC + 1}$$

$$F(p) = \frac{1}{(p/\omega_e)^2 + 3(p/\omega_e) + 1}$$

Die Nullstellen von $F(p)$ ergeben sich als Lösung einer quadratischen Gleichung:

$$P_{01,02} = \omega_e \left[-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} \right] = \omega_e * [-1.5 \pm 1.118]$$

Der Nenner von $F(p)$ lässt sich mit Hilfe der Nullstellen in Linearfaktoren zerlegen:

$$F(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_e}\right)^2 + 3\frac{p}{\omega_e} + 1} = \frac{1}{\left(\frac{p}{p_{01}} - 1\right)\left(\frac{p}{p_{02}} - 1\right)} = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_{e1}} + 1\right)\left(\frac{p}{\omega_{e2}} + 1\right)}$$

$$p_{01} = -\omega_{e1} = -0.382 \cdot \omega_e$$

$$\omega_{e1} = 382 \text{ s}^{-1}$$

$$f_{e1} = 60.8 \text{ Hz}$$

$$p_{02} = -\omega_{e2} = -2.618 \cdot \omega_e$$

$$\omega_{e2} = 2618 \text{ s}^{-1}$$

$$f_{e2} = 416.7 \text{ Hz}$$

p wird wieder ersetzt durch $j\omega$

$$F(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{e1}}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{e2}}\right)}$$

Konstruktion Bode-Diagramm

Anhand von Arbeitsblatt EGII-17 soll die Konstruktion des oberen Frequenzganges (Bode-Diagramm) erläutert werden. In den Bildern a) und c) werden die Einzelfrequenzgänge

$$\underline{F}_1 = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{e1}}} \quad \underline{F}_2 = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{e2}}}$$

durch Geraden angenähert.

In den Bildern b) und d) sind die Einzelfrequenzgänge abschnittsweise addiert worden. Die Addition von Geraden ergibt wieder Geraden. Am besten arbeitet man mit der Steigung:

Steigung Frequenzgang

$\omega < \omega_{e1}$	=>	0 dB/Dekade
$\omega_{e1} < \omega < \omega_{e2}$	=>	-20 dB/Dekade
$\omega > \omega_{e2}$	=>	-40 dB/Dekade

Steigung Winkel

$\omega < \omega_{e1}/10$	=>	0°/Dekade
$\omega_{e1}/10 < \omega < \omega_{e2}/10$	=>	-45°/Dekade
$\omega_{e2}/10 < \omega < 10\omega_{e1}$	=>	-90°/Dekade
$10\omega_{e1} < \omega < 10\omega_{e2}$	=>	-45°/Dekade
$\omega > 10\omega_{e2}$	=>	0°/Dekade

Am Einfachsten ist, an einem Punkt die Überlagerung zu beginnen und danach in den einzelnen Abschnitten Geraden einzuzeichnen, wobei die Steigung sich aus der Steigung der Einzelsummen ergibt.

Diskussion des Ergebnisses

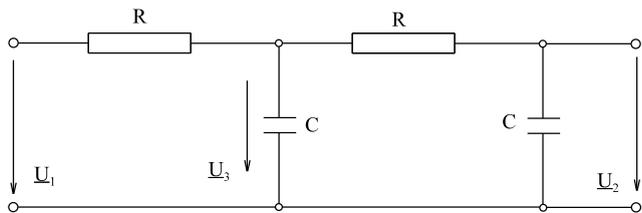
Durch die Verkopplung wird die Eckfrequenz aufgespalten in zwei einzelne Eckfrequenzen.

Beim Tiefpass 1. Ordnung war die Steigung bei hohen Frequenzen -20 dB/Dekade, hier, beim Tiefpass zweiter Ordnung, beträgt die Steigung -40 dB/Dekade bei hohen Frequenzen.

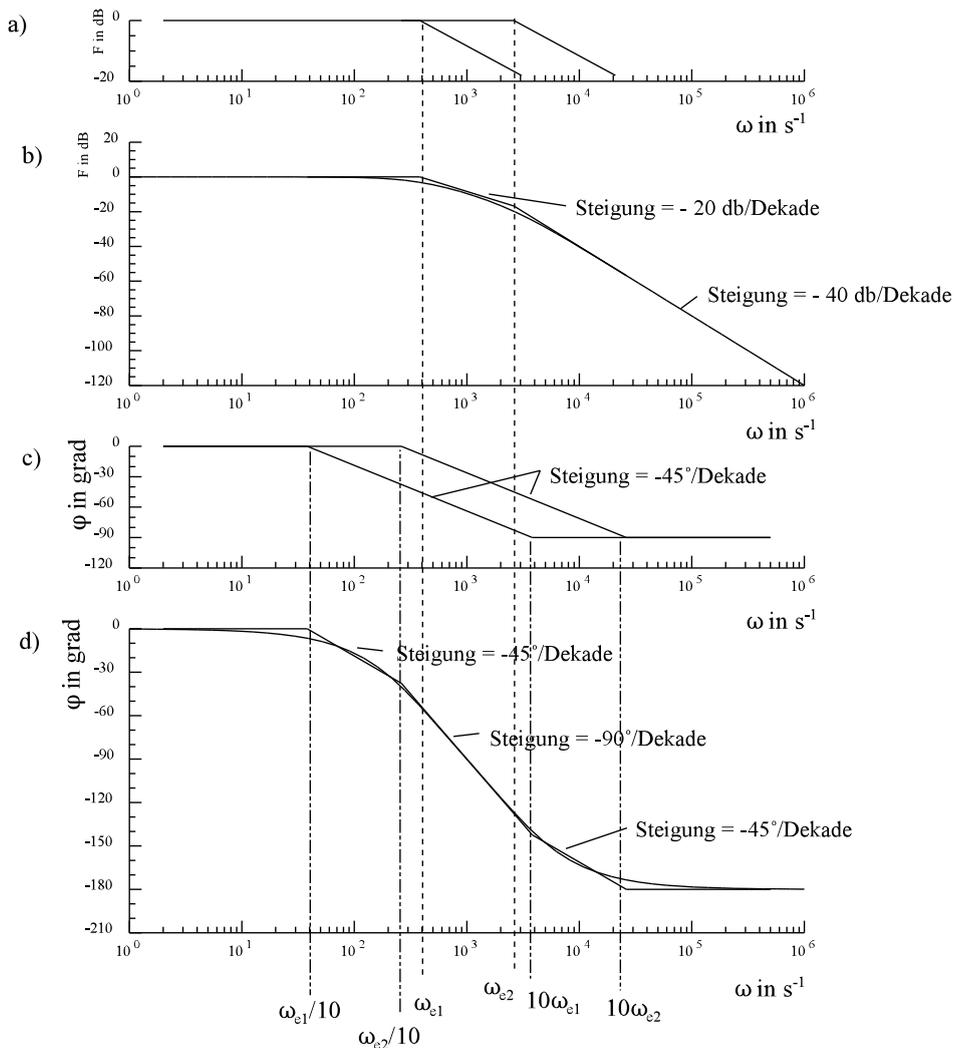
Der Winkel dreht von 0° bis auf -2*90°, weil Tiefpass 2. Ordnung.

Arbeitsblatt EGII-17:

Tiefpass 2. Ordnung



$R = 1 \text{ k}\Omega$ $C = 1 \mu\text{F}$ $\omega_e = \frac{1}{R * C} = 1000 \frac{1}{s}$



$\omega_{e1} = 382 \text{ s}^{-1}$ $\omega_{e2} = 2618 \text{ s}^{-1}$

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{e1}}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{e2}}\right)}$$

$$F_{dB} = -20 \text{ dB} \lg \sqrt{1 + (\omega/\omega_{e1})^2} - 20 \text{ dB} \lg \sqrt{1 + (\omega/\omega_{e2})^2}$$

$$\varphi = -\arctan(\omega/\omega_{e1}) - \arctan(\omega/\omega_{e2})$$

6.7.5.8. Beispiele, Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 6.7.5

Beispiel 1:

Für einen Tiefpass 2. Ordnung

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{10}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2}$$

ist die Grenzfrequenz zu bestimmen ($\omega_e = 100 \text{ s}^{-1}$).

$$F_{\max} = 10$$

$$\frac{\underline{F}(j\omega)}{F_{\max}} = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2}$$

$$\frac{F(\omega)}{F_{\max}} = \frac{1}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2}\right]^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_{gr}}{\omega_e}\right)^2}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\frac{\omega_{gr}}{\omega_e}\right)^2$$

$$\frac{\omega_{gr}}{\omega_e} = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

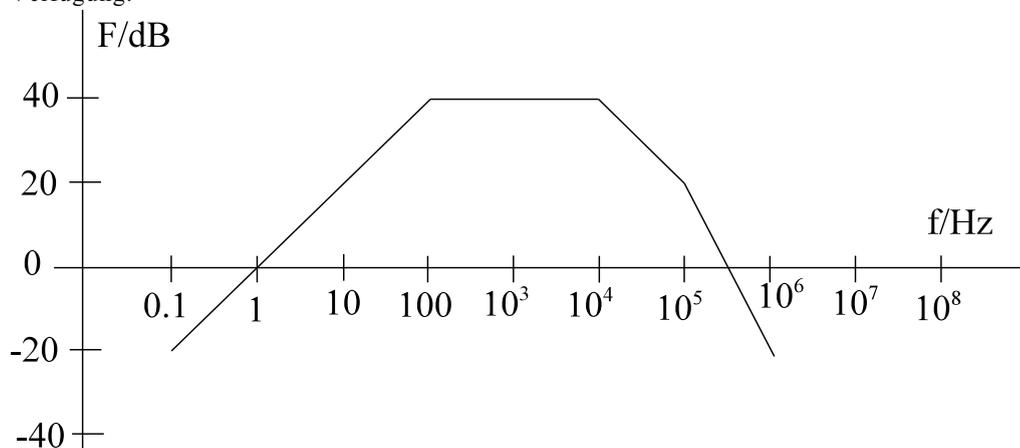
$$\omega_{gr} = \omega_e * \sqrt{\sqrt{2} - 1} = \omega_e * 0.644$$

$$\omega_{gr} = 0.644 * 1000 \text{ s}^{-1} = 644 \text{ s}^{-1}$$

$$f_{gr} = \frac{\omega_{gr}}{2\pi} = \frac{644 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 106 \text{ s}^{-1}$$

Beispiel 2:

Ein Filter soll die unten gezeigte Betrags-Charakteristik aufweisen. Geben Sie eine zugehörige Schaltung an, bei der die verwendeten Widerstände $R = 10 \text{ k}\Omega$ aufweisen. Geben Sie den fehlenden Phasengang an. Außer Widerständen stehen für die Schaltung Kondensatoren und ideale Verstärker einstellbarer Verstärkung zur Verfügung.

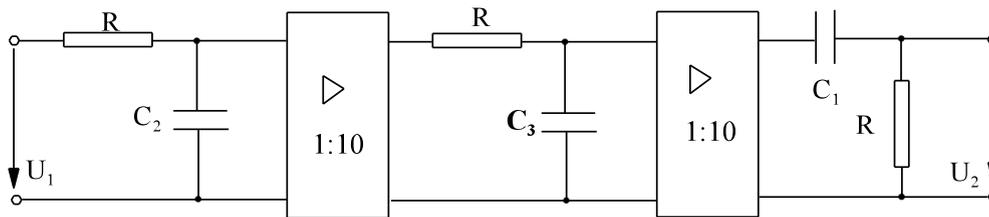


Lösungsweg:

ein Hochpass
 zwei Tiefpässe
 zwei Verstärker

$f_{e1} = 100 \text{ Hz}$
 $f_{e2} = 10 \text{ kHz}$
 $K_{ges} = 100 \text{ weil } 40 \text{ dB}$

$f_{e3} = 100 \text{ kHz}$



$R = 10 \text{ k}\Omega$ vorgegeben

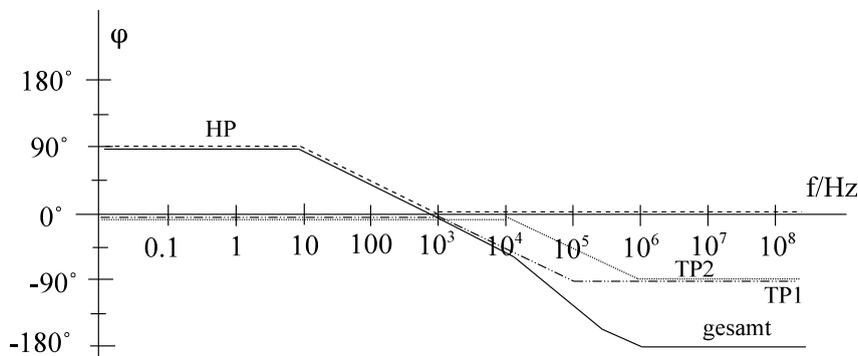
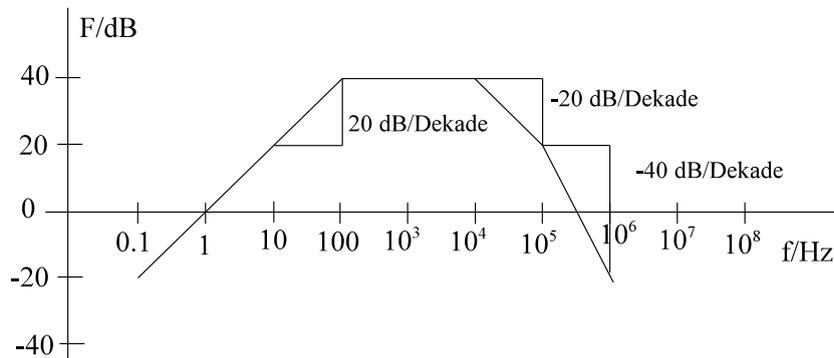
$$\omega_{e1} = \frac{1}{R * C} \quad f_e = \frac{\omega_e}{2\pi} = \frac{1}{R * C * 2\pi}$$

$$C = \frac{1}{R * f_e * 2\pi}$$

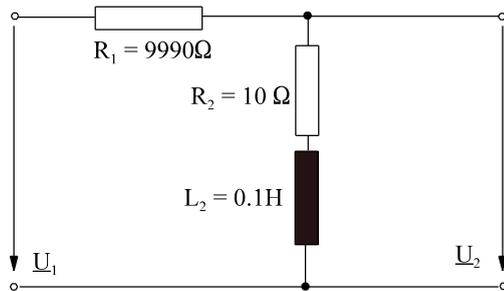
$$C_1 = \frac{1}{10 * 10^3 \frac{V}{A} * 100 s^{-1} * 2\pi} = 0.159 \mu F$$

$$C_2 = \frac{C_1}{100} = 1.59 nF$$

$$C_3 = \frac{C_2}{10} = 0.159 nF$$



Beispiel 3



Für die dargestellte Schaltung ist der Frequenzgang $\underline{F}(j\omega)$

- herzuleiten
- im Bodediagramm darzustellen.

Lösungsweg: a) herzuleiten

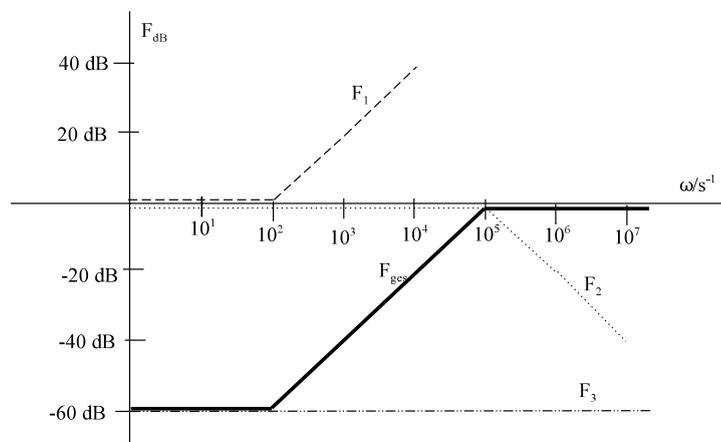
$$\underline{F}(j\omega) = \frac{R_2 + j\omega * L}{R_1 + R_2 + j\omega * L} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} * \frac{1 + j \frac{\omega * L}{R_2}}{1 + j \frac{\omega * L}{R_1 + R_2}}$$

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} * \frac{1 + j \frac{\omega}{R_2/L}}{1 + j \frac{\omega}{(R_1 + R_2)/L}} = K * \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_{e1}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{e2}}}$$

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \Omega}{9990 \Omega + 10 \Omega} = 0.001$$

$$\omega_{e1} = \frac{R_2}{L_2} = \frac{10 \text{ V/A}}{0.1 \text{ Vs/A}} = 100 \text{ s}^{-1} = 10^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_{e2} = \frac{R_1 + R_2}{L_2} = \frac{(9990 + 10) \text{ V/A}}{0.1 \text{ Vs/A}} = 10^5 \text{ s}^{-1}$$



b) im Bodediagramm darzustellen.

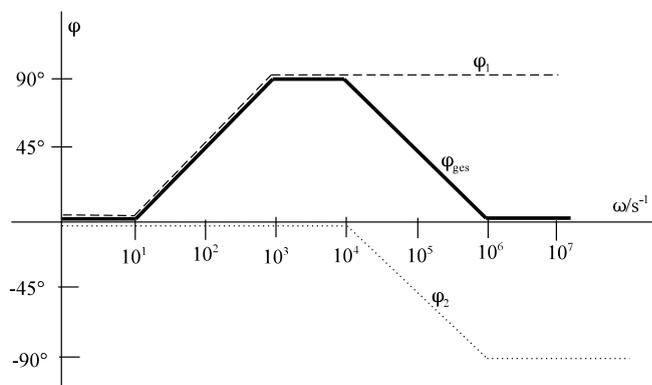
$$\underline{F}_1(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_{e1}}$$

$$\omega_{e1} = 10^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\underline{F}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j \omega / \omega_{e2}}$$

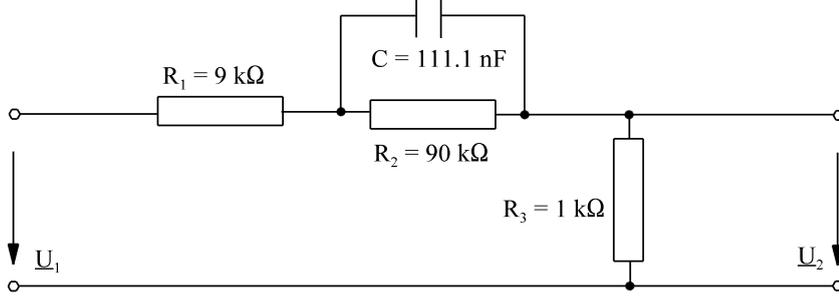
$$\omega_{e2} = 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$\underline{F}_3(j\omega) = 0.001 \quad 0.001 \triangleq -60 \text{ dB}$$



Beispiel 4:Für die unten dargestellte Schaltung ist der Frequenzgang $\underline{F}(j\omega)$

- allgemein herzuleiten
- mit Zahlenwerten zu berechnen
- im Bodediagramm darzustellen.

**Lösungsweg:**

- allgemein herzuleiten

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{R_3}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega * C} + R_3} = \frac{R_3 * (\frac{1}{R_2} + j\omega * C)}{(R_1 + R_3) * (\frac{1}{R_2} + j\omega * C) + 1}$$

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\frac{R_3}{R_2} * (1 + j\omega * C * R_2)}{\left(\frac{R_1 + R_3}{R_2} + 1\right) + j\omega * C * (R_1 + R_3)} = \frac{\frac{R_3}{R_2} * (1 + j\omega * C * R_2)}{\frac{R_1 + R_3 + R_2}{R_2} + j\omega * C * (R_1 + R_3)}$$

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\frac{R_3}{R_2}}{\frac{R_1 + R_3 + R_2}{R_2}} * \frac{1 + j\omega * C * R_2}{1 + j\omega * C * \frac{(R_1 + R_3) * R_2}{R_1 + R_3 + R_2}} = \frac{R_3}{R_1 + R_3 + R_2} * \frac{1 + j \frac{\omega}{\frac{1}{C * R_2}}}{1 + j \frac{\omega}{\frac{R_1 + R_3 + R_2}{C * R_2 * (R_1 + R_3)}}}$$

$$\underline{F}(j\omega) = K * \frac{1 + j\omega/\omega_{e1}}{1 + j\omega/\omega_{e2}}$$

$$\omega_{e1} = \frac{1}{C * R_2} = \frac{1}{1111 * 10^{-9} \frac{As}{V} * 90 * 10^3 \frac{V}{A}} = 100s^{-1}$$

$$\omega_{e2} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{C * R_2 * (R_1 + R_3)} = \frac{9k\Omega + 90k\Omega + 1k\Omega}{1111 * 10^{-9} \frac{As}{V} * 90 * 10^3 \frac{V}{A} * (9k\Omega + 1k\Omega)} = 1000s^{-1}$$

$$K = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1k\Omega}{9k\Omega + 90k\Omega + 1k\Omega} = \frac{1}{100}$$

- mit Zahlenwerten zu berechnen

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1k\Omega}{9k\Omega + \frac{1}{\frac{1}{90k\Omega} + j\omega * C} + 1k\Omega} = \frac{1k\Omega * \left(\frac{1}{90k\Omega} + j\omega * C\right)}{10k\Omega * \left(\frac{1}{90k\Omega} + j\omega * C\right) + 1} = \frac{\frac{1}{90} + j\omega * C * 1k\Omega}{\frac{10}{9} + j\omega * C * 10k\Omega}$$

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{\frac{90}{10}} * \frac{1 + j\omega * C * 90 * 1 \text{ k}\Omega}{1 + j\omega * C * \frac{9}{10} * 10 \text{ k}\Omega} = K * \frac{1 + j\omega/\omega_{e1}}{1 + j\omega/\omega_{e2}}$$

$$K = \frac{1}{\frac{90}{10}} = 0.01$$

$$\omega_{e1} = \frac{1}{C * 90 * 1 \text{ k}\Omega} = \frac{1}{1111 * 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} * 90 * 10^3 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 100 \text{ s}^{-1}$$

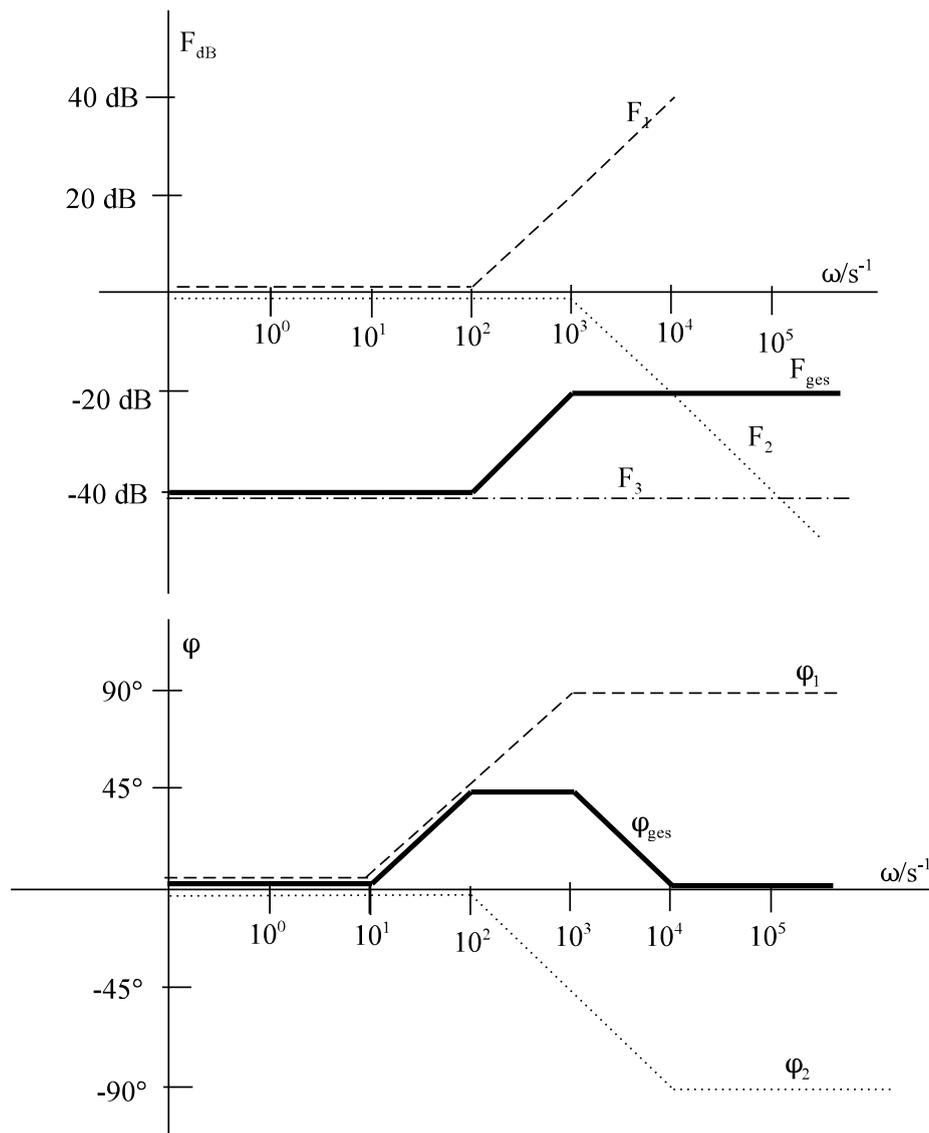
$$\omega_{e2} = \frac{1}{C * \frac{9}{10} * 10 \text{ k}\Omega} = \frac{1}{1111 * 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} * \frac{9}{10} * 10^4 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 1000 \text{ s}^{-1}$$

c) im Bodediagramm darzustellen.

$$\underline{F}_1(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_{e1}} \quad \omega_{e1} = 10^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\underline{F}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{e2}} \quad \omega_{e2} = 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\underline{F}_3(j\omega) = 0.01 \quad 0.01 \hat{=} -40 \text{ dB}$$



Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch	
AF.6.7.5.A	Im Bodediagramm wird dargestellt:	* Real- und Imaginärteil von $\underline{F}(j\omega)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Betrag und Winkel von $\underline{F}(j\omega)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.B	Im Bodediagramm wird dargestellt:	* Betrag in dB	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Betrag absolut	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Winkel absolut	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Winkel logarithmisch	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Frequenz/Kreisfrequenz logarithmisch	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.C	Im Bodediagramm kann als x-Achse dargestellt werden:	* Kreisfrequenz ω logarithmisch	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Kreisfrequenz ω linear	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Frequenz f logarithmisch	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* Frequenz f linear	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.D	Die Grenzfrequenz / Grenzkreisfrequenz ist definiert als die Frequenz / Kreisfrequenz bei der:	* der Winkel des Frequenzganges $\pm 45^\circ$ beträgt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* der Betrag des Frequenzganges $1/\sqrt{2}$ beträgt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* der Betrag des Frequenzganges $\sqrt{2}$ beträgt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* der Betrag des Frequenzganges auf $1/\sqrt{2}$ vom Maximum abgesunken ist	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.E	Bei der Grenzfrequenz / Grenzkreisfrequenz beträgt der Betrag des Frequenzganges F_{dB} :	* + 3 dB	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* - 3 dB	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* 3 dB weniger als im Maximum	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.F	Bei einem Tiefpass / Hochpass 1. Ordnung:	* ist die Grenzfrequenz f_{gr} gleich der Eckfrequenz f_e	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* ist die Grenzfrequenz f_{gr} ungleich der Eckfrequenz f_e	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.G	Bei einem Tiefpass / Hochpass 2. Ordnung:	* ist die Grenzfrequenz f_{gr} gleich der Eckfrequenz f_e	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* ist die Grenzfrequenz f_{gr} ungleich der Eckfrequenz f_e	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.H	Ein Tiefpass 1. Ordnung weist im Betrag des Bodediagrammes eine Steigung auf von:	* -40 dB/Dekade für tiefe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* -20 dB/Dekade für tiefe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* 0 dB/Dekade für tiefe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* 20 dB/Dekade für tiefe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* 40 dB/Dekade für tiefe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* -40 dB/Dekade für hohe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* -20 dB/Dekade für hohe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* 0 dB/Dekade für hohe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* 20 dB/Dekade für hohe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.I	Ein Tiefpass 2. Ordnung weist im Betrag des Bodediagrammes eine Steigung auf von:	* -40 dB/Dekade für tiefe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* -20 dB/Dekade für tiefe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* 0 dB/Dekade für tiefe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* 20 dB/Dekade für tiefe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* 40 dB/Dekade für tiefe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* -40 dB/Dekade für hohe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* -20 dB/Dekade für hohe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* 0 dB/Dekade für hohe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		* 20 dB/Dekade für hohe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
* 40 dB/Dekade für hohe Frequenzen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.6.7.5.J	Ein Hochpass 1. Ordnung weist im Betrag des Bodediagrammes eine Steigung auf von: * -40 dB/Dekade für tiefe Frequenzen * -20 dB/Dekade für tiefe Frequenzen * 0 dB/Dekade für tiefe Frequenzen * 20 dB/Dekade für tiefe Frequenzen * 40 dB/Dekade für tiefe Frequenzen * -40 dB/Dekade für hohe Frequenzen * -20 dB/Dekade für hohe Frequenzen * 0 dB/Dekade für hohe Frequenzen * 20 dB/Dekade für hohe Frequenzen * 40 dB/Dekade für hohe Frequenzen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.K	Ein Hochpass 2. Ordnung weist im Betrag des Bodediagrammes eine Steigung auf von: * -40 dB/Dekade für tiefe Frequenzen * -20 dB/Dekade für tiefe Frequenzen * 0 dB/Dekade für tiefe Frequenzen * 20 dB/Dekade für tiefe Frequenzen * 40 dB/Dekade für tiefe Frequenzen * -40 dB/Dekade für hohe Frequenzen * -20 dB/Dekade für hohe Frequenzen * 0 dB/Dekade für hohe Frequenzen * 20 dB/Dekade für hohe Frequenzen * 40 dB/Dekade für hohe Frequenzen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.L	Bei der Reihenschaltung von zwei gleichen Tiefpässen (Hochpässen) ohne Verstärker ergeben sich: * zwei gleiche Eckfrequenzen * zwei unterschiedliche Eckfrequenzen * drei unterschiedliche Eckfrequenzen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.M	Bei der Reihenschaltung von zwei gleichen Tiefpässen (Hochpässen) mit Verstärker ergeben sich: * zwei gleiche Eckfrequenzen * zwei unterschiedliche Eckfrequenzen * drei unterschiedliche Eckfrequenzen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.N	Der Grund für das Auftreten von zwei unterschiedlichen Eckfrequenzen bei der Reihenschaltung von zwei gleichen Tiefpässen ohne Verstärker ist: * die Bauteiltoleranz (Abweichung vom Nennwert) * die Belastung des ersten Spannungsteiler durch den ersten Spannungsteiler	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.O	Bei der Reihenschaltung von zwei gleichen Tiefpässen mit Verstärker * ist die Grenzfrequenz gleich der Eckfrequenz * ist die Grenzfrequenz größer als die Eckfrequenz * ist die Grenzfrequenz kleiner als die Eckfrequenz	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.5.P	Bei der Reihenschaltung von zwei gleichen Hochpässen mit Verstärker * ist die Grenzfrequenz gleich der Eckfrequenz * ist die Grenzfrequenz größer als die Eckfrequenz * ist die Grenzfrequenz kleiner als die Eckfrequenz	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Frage 6.7.5.A Skizzieren Sie eine mögliche Realisation eines Tiefpasses.

Frage 6.7.5.B Skizzieren Sie eine mögliche Realisation eines Hochpasses.

Frage 6.7.5.C Skizzieren Sie eine mögliche Realisation eines Tiefpasses mit R und C.

Frage 6.7.5.D Skizzieren Sie eine mögliche Realisation eines Hochpasses mit R und C.

Frage 6.7.5.E Im Bodediagramm wird dargestellt:

Frage 6.7.5.F Die Grenzfrequenz / Grenzkreisfrequenz ist definiert als die Frequenz / Kreisfrequenz,

Frage 6.7.5.G Ein Tiefpass 1. Ordnung weist im Betrag des Bodediagrammes eine Steigung auf von:

* für tiefe Frequenzen _____

* für hohe Frequenzen _____

Frage 6.7.5.H Ein Tiefpass 2. Ordnung weist im Betrag des Bodediagrammes eine Steigung auf von:

* für tiefe Frequenzen _____

* für hohe Frequenzen _____

Frage 6.7.5.I Ein Hochpass 1. Ordnung weist im Betrag des Bodediagrammes eine Steigung auf von:

* für tiefe Frequenzen _____

* für hohe Frequenzen _____

Frage 6.7.5.J Ein Hochpass 2. Ordnung weist im Betrag des Bodediagrammes eine Steigung auf von:

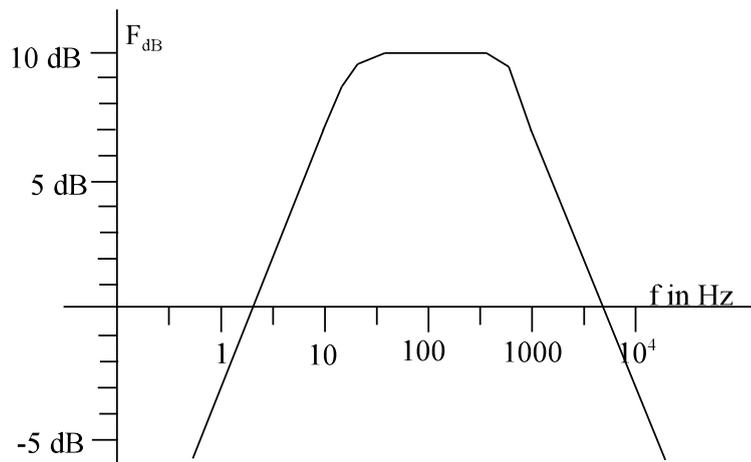
* für tiefe Frequenzen _____

* für hohe Frequenzen _____

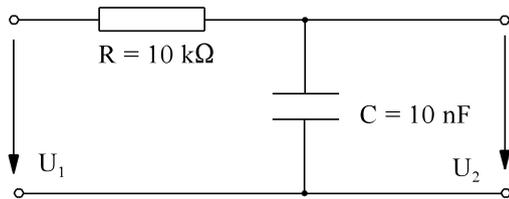
Frage 6.7.5.K Bei der Reihenschaltung von zwei Tiefpässen (Hochpässen) ohne Verstärker ergibt sich folgender Effekt:

Aufgabe 6.7.5.A

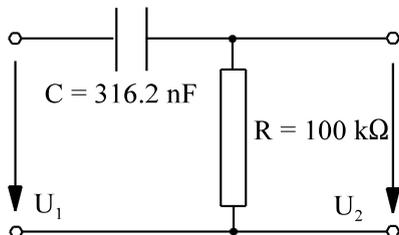
Bestimmen Sie aus dem unten dargestellten Teil des Bodediagramms (nur Betrag) die Grenzfrequenzen.

**Aufgabe 6.7.5.B**

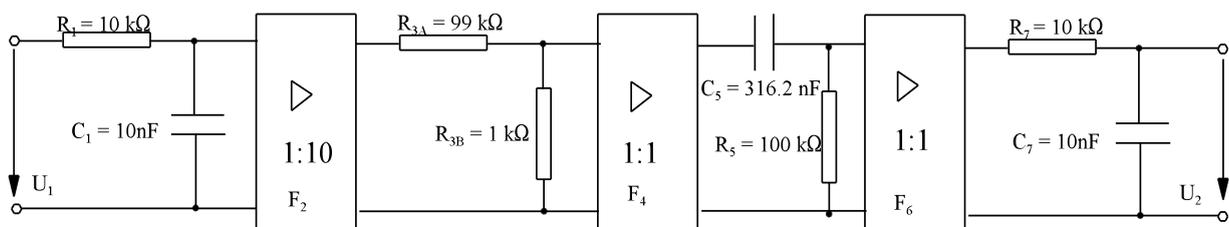
Skizzieren Sie das Bodediagramm des Frequenzgang der folgenden Schaltung. Skalieren Sie die ω -Achse in s^{-1} .

**Aufgabe 6.7.5.C**

Skizzieren Sie das Bodediagramm des Frequenzgang der folgenden Schaltung. Skalieren Sie die ω -Achse in s^{-1} .

**Aufgabe 6.7.5.D**

a) Skizzieren Sie das Bodediagramm des Frequenzgang der folgenden Schaltung. Skalieren Sie die ω -Achse in s^{-1} .

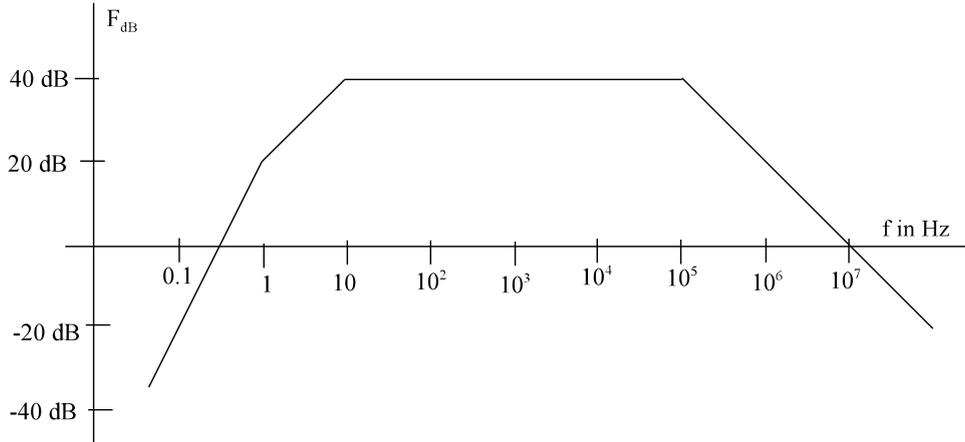


b) Bestimmen Sie die untere Grenzfrequenz.

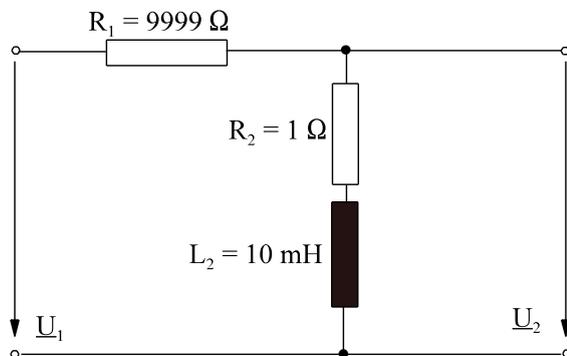
c) Schätzen Sie die obere Grenzfrequenz ab.

Aufgabe 6.7.5.E

Ein Filter soll die unten gezeigte Betrags-Charakteristik aufweisen. Geben Sie eine zugehörige Schaltung an, bei der die verwendeten Widerstände $R = 10 \text{ k}\Omega$ aufweisen. Geben Sie den fehlenden Phasengang an. Außer Widerständen stehen für die Schaltung Kondensatoren und ideale Verstärker einstellbarer Verstärkung zur Verfügung.



Aufgabe 6.7.5.F

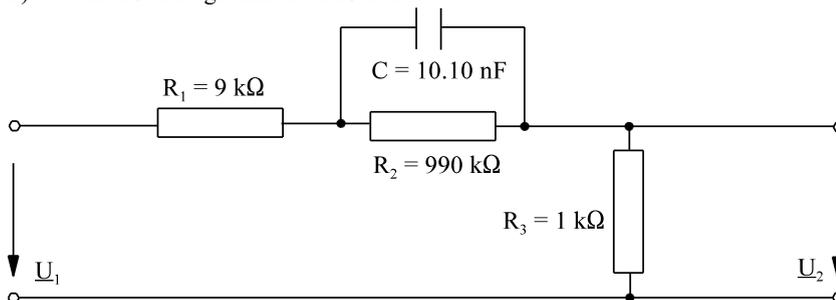


Für die dargestellte Schaltung ist der Frequenzgang $\underline{F}(j\omega)$
 a) herzuleiten
 b) im Bodediagramm darzustellen.

Aufgabe 6.7.5.G

Für die unten dargestellte Schaltung ist der Frequenzgang $\underline{F}(j\omega)$

- a) mit Zahlenwerten zu berechnen
- b) im Bodediagramm darzustellen.



Aufgabe 6.7.5.H

Ein Filter hat den folgenden Frequenzgang:

$$\underline{F}(j\omega) = 31 \cdot \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{e1}}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{e2}}\right)}$$

mit $\omega_{e1} = 2000 \text{ s}^{-1}$, $\omega_{e2} = 4000 \text{ s}^{-1}$. Berechnen Sie die Grenzfrequenz.

6.7.6. Schwingkreise

6.7.6.1. Freie Schwingungen

Am bekanntesten sind die freien Schwingungen am mechanischen Beispiel des Feder-Messe-Systems.

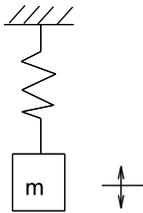


Bild EG6761A

Die Masse pendelt um den Ruhewert der Auslenkung. Dabei erfolgt auch eine Schwingung der Energie. Kinetische, potentielle Energie und Federenergie werden miteinander ausgetauscht.

Was passiert bei der Entladung eines Kondensators auf eine Induktivität?

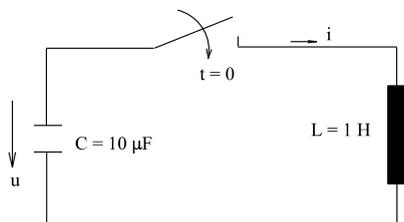


Bild EG6761B

Anschauliche Erklärung:

Wird der Schalter geschlossen, will sich der Kondensator entladen. Da der Strom in der Induktivität sich nicht sprungförmig verändern kann, steigt dieser langsam an. Es erfolgt dabei ein Energieaustausch.

$$w_C = \frac{1}{2} C u^2(t)$$

$$w_L = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

Da die obere Anordnung ideal ist, kann die Energie nur in C oder L vorhanden sein. Ist der Kondensator entladen, weist die Energie in L ein Maximum auf. Die gespeicherte Energie in L wird wieder entladen, dadurch wird der Kondensator mit negativer Spannung aufgeladen, bis der Strom Null wird. Dann ist die Energie wieder vollständig in C vorhanden. Da keine Energie verloren gehen kann, wiederholt sich dieser Vorgang immer in der gleichen Größe, siehe Bild EG6761C.

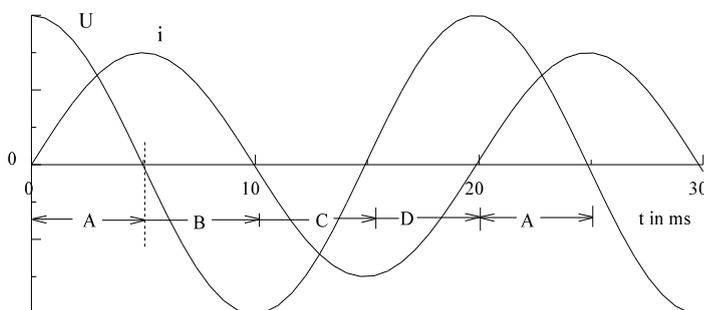


Bild EG6761C

- | | | |
|----|------------------|-----------------|
| A] | Entladung C (+u) | Aufladung L(+i) |
| B] | Aufladung C (-u) | Entladung L(+i) |
| C] | Entladung C (-u) | Aufladung L(-i) |
| D] | Aufladung C (+u) | Entladung L(-i) |

Mathematische Erklärung

$$u_C = - \frac{1}{C} \int i dt$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$u_C = u_L$$

$$- \frac{1}{C} \int i dt = L \frac{di}{dt}$$

$$- i = C * L * \frac{d^2 i}{dt^2}$$

Ansatz: $i(t) = \hat{i} * \sin(\omega_0 t)$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\hat{i} * \omega_0^2 * \sin(\omega_0 t)$$

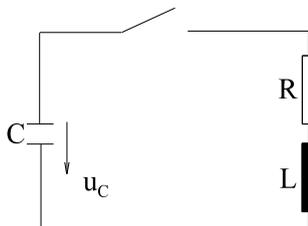
$$-\hat{i} * \sin(\omega_0 t) = C * L * \omega_0^2 * \hat{i} * \sin(\omega_0 t)$$

$$1 = C * L * \omega_0^2$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L * C}}$
$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L * C}}$
$T = \frac{1}{f_0} = 2\pi * \sqrt{L * C}$

Reale freie Schwingungen

In jeder Spule, auch in jedem Kondensator, sind Leiter mit endlichen Widerständen. Dieses wird nach Bild EG6761D durch einen Reihenwiderstand berücksichtigt.



Durch den Widerstand wird Energie in Wärme umgesetzt und damit die Schwingung gedämpft. Die Amplituden der Schwingung nehmen nach einer e-Funktion ab, siehe Bild EG6761E.

Bild EG6761D

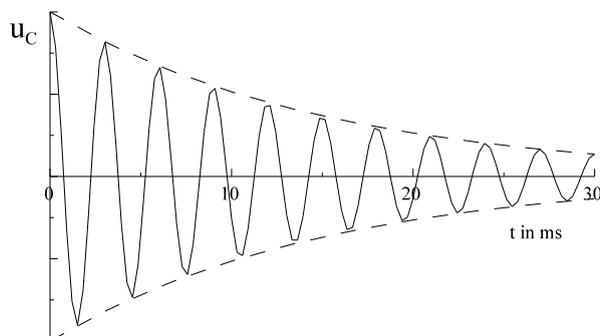


Bild EG6761E

Ein realer Schwingkreis besteht demnach aus den Elementen R, L und C.

Hinweis: Die Frequenz der Eigenschwingungen weicht etwas von der idealen $\omega_0 = 1 / \sqrt{L * C}$ ab, siehe Kap. 10, 3. Semester.

6.7.6.2. Erzwungene Schwingungen

Das obere ω_0 wird Eigenfrequenz des Schwingkreises genannt. Nach Bild EG6761E verschwinden die Eigenschwingungen mit der Zeit. In EGII sollen nur eingeschwungene Stromkreise behandelt werden, wo der obere Vorgang abgeklungen ist. Daher sollen in diesem und in den nächsten Abschnitten die erzwungenen Schwingungen behandelt werden.

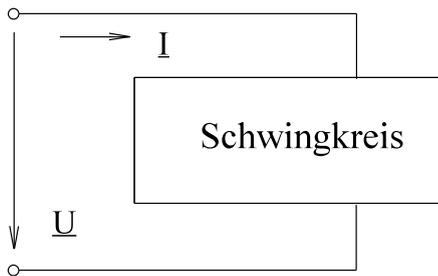
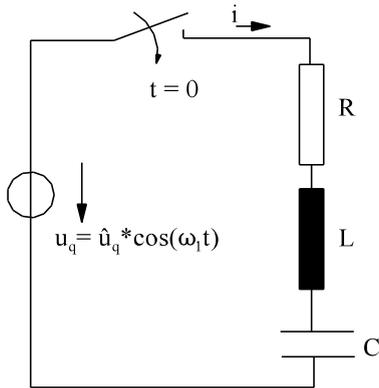


Bild EG6762A



Beim Einschalten eines Schwingkreises (siehe Bild EG6762B) treten freie und erzwungene Schwingungen (siehe Bild EG6762C) auf, nach dem Einschalten sind beide Schwingungsarten vorhanden. Die freien Schwingungen werden in der Regel gedämpft. Weit nach dem Einschalten sind dann nur die erzwungenen Schwingungen vorhanden, die mit der komplexen Wechselstromrechnung zu bestimmen sind und von der Spannungsquelle begründet sind.

Es gibt die zwei Möglichkeiten, die drei Element R, L und C in Reihe oder parallel zu schalten, siehe nächsten zwei Abschnitte .

Bild EG6762B

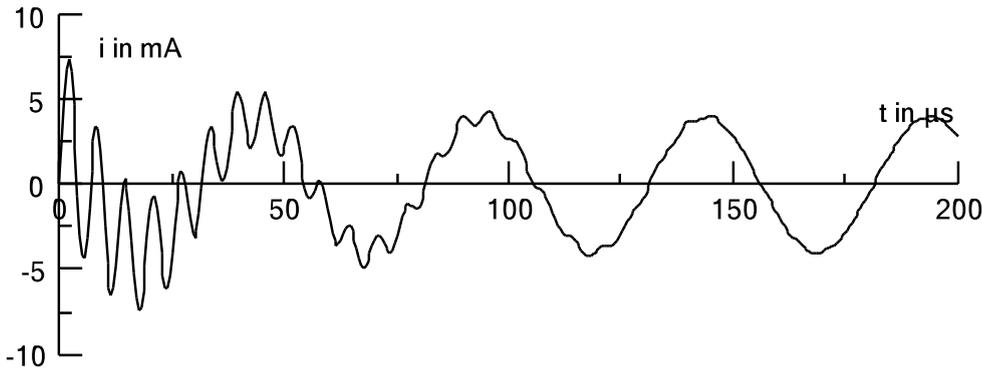
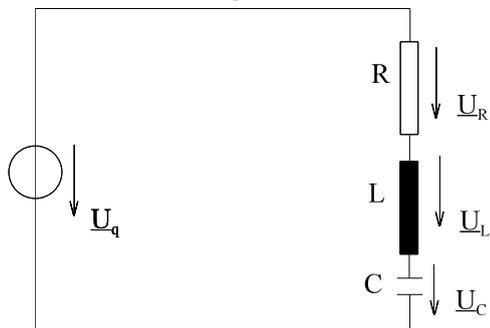


Bild EG6762C

6.7.6.3. Reihenschwingkreis



Für den Reihenschwingkreis nach Bild EG6763A sollen Strom und Spannungen an den einzelnen Elementen diskutiert werden.

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Bild EG6763A

Die Kreisfrequenz ω wird auf

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

- ω_0 - Imaginärteil gleich Null
- minimaler Betrag des Widerstandes

normiert:

$$\underline{Z} = R + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 * L - \frac{1}{\omega_0 * C} \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

$$\omega_0 * L = \frac{L}{\sqrt{L * C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\frac{1}{\omega_0 * C} = \frac{\sqrt{L * C}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega_0 * L = \frac{1}{\omega_0 * C} = X_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{Definition}$$

$$\underline{Z} = R + jX_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega/\omega_0} \right)$$

$$\underline{Z} = R \left[1 + j \frac{X_0}{R} \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) \right]$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} \text{ - Normierte Frequenz / Kreisfrequenz}$$

$$Q = \frac{X_0}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} \text{ - Güte } Q \gg 1$$

$$\underline{Z} = R \left[1 + jQ \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) \right]$$

Einführung einer normierten komplexen Funktion:

$$\underline{F}(\Omega) = \frac{1}{1 + jQ(\Omega - \Omega^{-1})}$$

$$\underline{Z} = R * F^{-1}(\Omega)$$

Mit $\underline{U}_q = U_q$ ergibt sich der Strom

$$\underline{I} = \frac{U_q}{\underline{Z}} = \frac{U_q}{R} \frac{1}{1 + jQ(\Omega - \Omega^{-1})} = \frac{U_q}{R} \underline{F}(\Omega)$$

Für die Berechnung der physikalischen Größen sind demnach die normierten Funktionen $F(\Omega)$ und $F^{-1}(\Omega)$ zu untersuchen. Auf Arbeitsblatt EGII-18 sind dargestellt

- \underline{F} nach Betrag und Phase (Q = 2, 5, 10)
- Ortskurve \underline{F}^{-1} (Q = 2, 10)
- Ortskurve \underline{F} (Q = 2, 10)

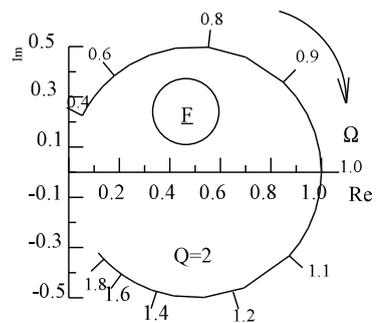
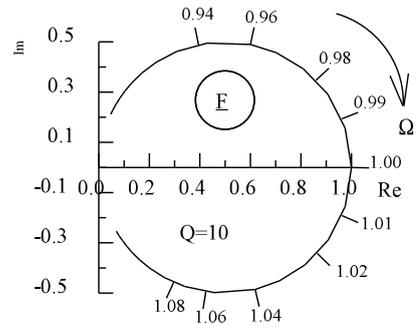
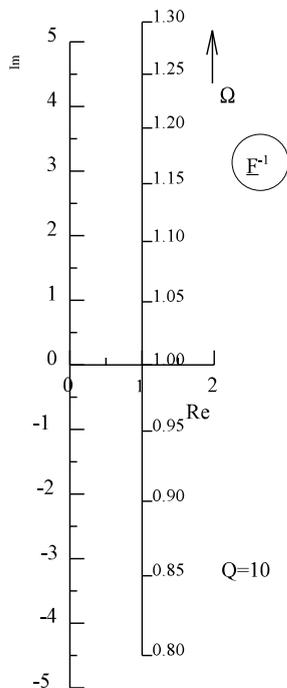
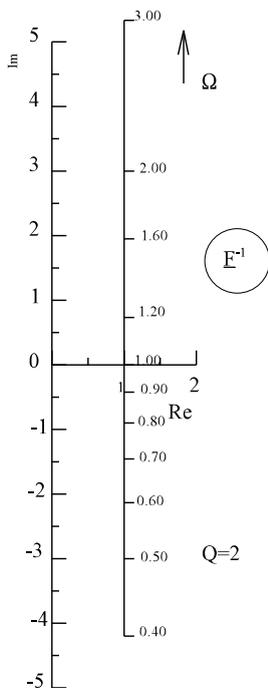
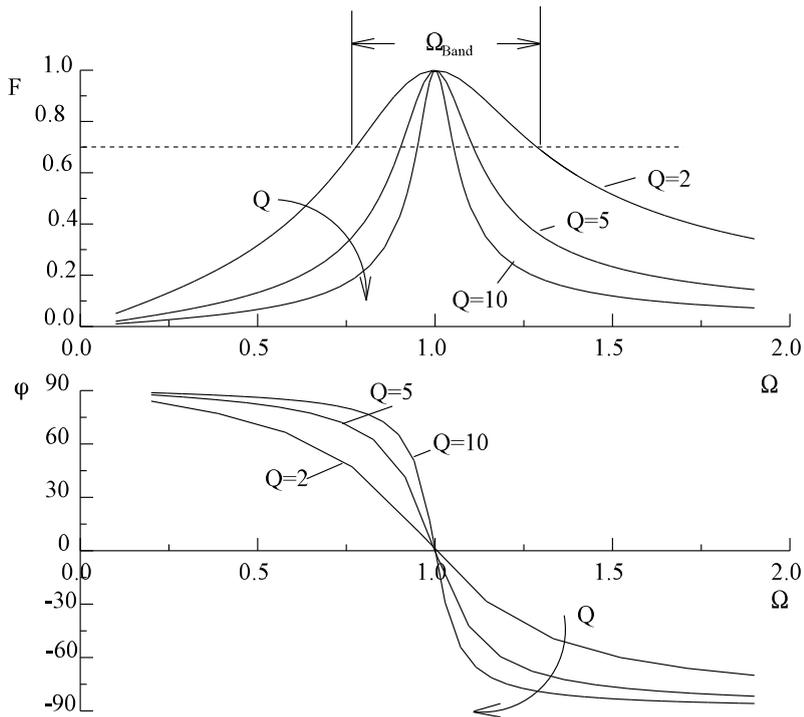
$$\underline{U}_R = R * \underline{I} = U_q * F(\Omega) = U_q * \frac{1}{1 + jQ(\Omega - \Omega^{-1})}$$

$$\underline{U}_L = j\omega L * \underline{I} = j \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 L * \underline{I} = j\Omega * X_0 * \frac{U_q}{R} * \frac{1}{1 - jQ(\Omega - \Omega^{-1})} = U_q * \frac{j\Omega * Q}{1 - jQ(\Omega - \Omega^{-1})}$$

$$\underline{U}_C = * \frac{\underline{I}}{j\omega C} = -j \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\omega_0 * C} * \underline{I} = -j\Omega^{-1} * X_0 * \frac{U_q}{R} * \frac{1}{1 - jQ(\Omega - \Omega^{-1})} = U_q * \frac{-j\Omega^{-1} * Q}{1 - jQ(\Omega - \Omega^{-1})}$$

Arbeitsblatt EGII-18

$$\underline{F}(\Omega) \frac{1}{1 + jQ(\Omega - \Omega^{-1})} = F * e^{j\varphi}$$



Die Ortskurve von \underline{F}^{-1} ist eine Gerade mit nichtlinearer Teilung. Achtung: keine Halbgerade. Damit ergibt sich \underline{F} als Inversion von \underline{F}^{-1} zu einem Kreis. Je höher die Güte ist, desto näher sind die Ω -Werte den Wert 1. Je größer die Güte ist, desto schmalbandiger ist der Betrag von F in Abhängigkeit von Ω . Die Bandbreite ergibt sich aus den Stellen an denen F den Wert $1/\sqrt{2}$ aufweist:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + j[\varrho(\Omega - \Omega^{-1})]^2}}$$

$$2 = 1 + \varrho^2 * \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2$$

$$1 = \varrho^2 * \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2$$

$$\pm 1 = \varrho^2 * \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)$$

$$\Omega - \frac{1}{\Omega} \pm \frac{1}{\varrho} = 0$$

$$\Omega^2 \mp \frac{1}{\varrho} * \Omega - 1 = 0$$

$$\Omega_{12} = \pm \frac{1}{2\varrho} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\varrho}\right)^2 + 1}$$

Real existierende Frequenzen können nur positiv sein. Wird dieses berücksichtigt, fallen zwei der oberen vier Lösungen weg und man erhält die Lösungen:

$$\Omega_1 = -\frac{1}{2\varrho} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\varrho}\right)^2 + 1}$$

$$\Omega_2 = +\frac{1}{2\varrho} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\varrho}\right)^2 + 1}$$

$$\Omega_{\text{Band}} = \Omega_2 - \Omega_1$$

$$\Omega_{\text{Band}} = \frac{1}{\varrho}$$

$$\omega_{\text{Band}} = \omega_0 * \Omega_{\text{Band}}$$

$$f_{\text{Band}} = \frac{\omega_{\text{Band}}}{2\pi}$$

$$f_{\text{Band}} = \frac{\omega_0}{2\pi * \varrho}$$

Die Bandbreite eines Schwingkreis ist umgekehrt proportional zur Güte

$$f_{\text{gxl2}} = \left[\mp \frac{1}{2\varrho} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\varrho}\right)^2 + 1} \right] \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Beispiel 1:

Für den auf Arbeitsblatt EGII-19 dargestellten Reihenschwingkreis sind zu berechnen bzw. darzustellen in der komplexen Ebene:

- die Resonanzkreisfrequenz ω_0
- die Resonanzfrequenz f_0
- die Güte Q
- die Bandbreite der Kreisfrequenz ω_{Band}
- die Bandbreite der Frequenz f_{Band}
- die zwei Grenzfrequenzen f_{gr1} und f_{gr2}
- den Strom \underline{I}
- die Spannung \underline{U}_R allgemein
- die Spannung \underline{U}_L allgemein
- die Spannung \underline{U}_C allgemein
- Zahlenwerte für $\omega = \omega_{\text{gr1}}$ der Aufgabenpunkte h bis j

- a) die Resonanzkreisfrequenz ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \text{ H} \cdot 10 \cdot 10^{-9} \text{ F}}} = 100 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}$$

- b) die Resonanzfrequenz f_0

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 15.92 \text{ kHz}$$

- c) die Güte Q

$$X_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ H}}{10 \cdot 10^{-9} \text{ F}}} = 1000 \Omega \quad Q = \frac{X_0}{R} = \frac{1000 \Omega}{100 \Omega} = 10$$

- d) die Bandbreite der Kreisfrequenz ω_{Band}

$$\omega_{\text{Band}} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}}{10} = 10 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}$$

- e) die Bandbreite der Frequenz f_{Band}

$$f_{\text{Band}} = \frac{\omega_{\text{Band}}}{2\pi} = 1.59 \text{ kHz}$$

- f) die zwei Grenzfrequenzen f_{gr1} und f_{gr2}

$$\omega_{\text{gr12}} = \left[\mp \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right] \omega_0 \quad \omega_{\text{gr12}} = \left[\pm \frac{1}{2 \cdot 10} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 10}\right)^2 + 1} \right] \cdot 100 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_{\text{gr12}} = (100.12 \mp 5) \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_{\text{gr1}} = 95.12 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_{\text{gr2}} = 105.15 \text{ s}^{-1}$$

$$f_{\text{gr1}} = \frac{\omega_{\text{gr1}}}{2\pi} = 15.14 \text{ kHz}$$

$$f_{\text{gr2}} = 16.73 \text{ kHz}$$

- g) den Strom \underline{I}

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = U_q \frac{j\omega C}{Rj\omega C + (j\omega)^2 LC + 1}$$

- h) die Spannung \underline{U}_R allgemein

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I} = U_q \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

- i) die Spannung \underline{U}_L allgemein

$$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I} = U_q \frac{(j\omega)^2 LC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

- j) die Spannung \underline{U}_C allgemein

$$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I} = U_q \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

k) Zahlenwerte für $\omega = \omega_{gr1}$ der Aufgabenpunkte h bis j

$$\underline{U}_R = 10 \text{ V} * \frac{j 95.12 * 10^3 \text{ s}^{-1} * 100 \Omega * 10^{-8} \text{ F}}{1 + j 95.12 * 10^3 \text{ s}^{-1} * 100 \Omega * 10^{-8} \text{ F} + (j 95.12 * 10^3 \text{ s}^{-1})^2 * 0.01 \text{ H} * 10^{-8} \text{ F}}$$

$$\underline{U}_R = 10 \text{ V} * \frac{j 0.09512}{1 + j 0.09512 - 0.9048} = 10 \text{ V} * \frac{j 0.09512}{0.0952 + j 0.09512} = 5 \text{ V} + j 5 \text{ V} = 7.07 \text{ V} / 45^\circ$$

$$\underline{U}_L = 10 \text{ V} * \frac{-0.9048}{0.0952 + j 0.09512} = (-47.5 + 47.5) \text{ V} = 67.2 \text{ V} / 135^\circ$$

$$\underline{U}_C = 10 \text{ V} * \frac{1}{0.0952 + j 0.09512} = (52.5 + 52.5) \text{ V} = 74.3 \text{ V} / -45^\circ$$

Alternative Berechnung

$$\underline{Z} = R \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = R \frac{1}{F(\Omega)}$$

$$\underline{I} = \frac{U_q}{\underline{Z}} = \frac{U_q}{R} \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} = \frac{U_q}{R} * F(\Omega)$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} * R = U_q \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} = U_q * F(\Omega)$$

$$\underline{U}_L = \underline{I} * j\omega L = \underline{I} * j \frac{\omega}{\omega_0} L \omega_0 = \underline{I} * \underline{Y}_0 * j \frac{\omega_0}{\omega} = \underline{U}_q \frac{jQ(\omega/\omega_0)}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} * \frac{1}{j\omega C} = \underline{I} * \frac{1}{j\omega/\omega_0} \frac{1}{C\omega_0} = -\underline{I} * \underline{Y}_0 * j \frac{\omega_0}{\omega} = -\underline{U}_q \frac{jQ(\omega/\omega_0)}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$$

$$f_{gr1} \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 0.9512 \quad Q = 10$$

$$1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 1 + j 10 \left(0.9512 - \frac{1}{0.9512} \right) = 1 - j 1 = \sqrt{2} / -45^\circ$$

$$\underline{I} = \frac{10 \text{ V}}{100 \Omega} \frac{1}{1 - j 1} = 70.7 \text{ mA} / 45^\circ$$

$$\underline{U}_R = \frac{10 \text{ V}}{1 - j 1} = 7.07 \text{ V} / 45^\circ$$

$$\underline{U}_L = 10 \text{ V} \frac{j 10 * 0.9512}{1 - j 1} = 67.3 \text{ V} / 135^\circ$$

$$\underline{U}_C = -10 \text{ V} \frac{j 10 * (0.9512)^{-1}}{1 - j 1} = 74.3 \text{ V} / -45^\circ$$

Diskussion der Ergebnisse:

Der Blindanteil aus L und C bestehend

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

ist von der Frequenz abhängig. Es gilt:

$\omega < \omega_0$	=>	$X < 0$	=>	Kapazitive Last	=>	$\varphi < 0$
$\omega = \omega_{gr1}$	=>	$X = -R$	=>			$\varphi = -45^\circ$
$\omega = \omega_0$	=>	$X = 0$	=>	rein ohmsche Last	=>	$\varphi = 0$
$\omega = \omega_{gr2}$	=>	$X = R$	=>			$\varphi = 45^\circ$
$\omega > \omega_0$	=>	$X > 0$	=>	induktive Last	=>	$\varphi > 0$

$$\varphi_{UL} = \varphi_{UR} + 90^\circ$$

$$\text{weil } \underline{U}_L = j\omega L * \underline{I}$$

$$\varphi_{UC} = \varphi_{UR} - 90^\circ$$

$$\text{weil } \underline{U}_C = \frac{\underline{I}}{j\omega C}$$

$$\omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad I, U_R \text{ maximal}$$

Resonanz: $\omega = \omega_0$ Je näher die Kreisfrequenz ω_0 erreicht, um so größer wird der Strom. Für Resonanz gilt:

$$\omega = \omega_0$$

$$X = 0$$

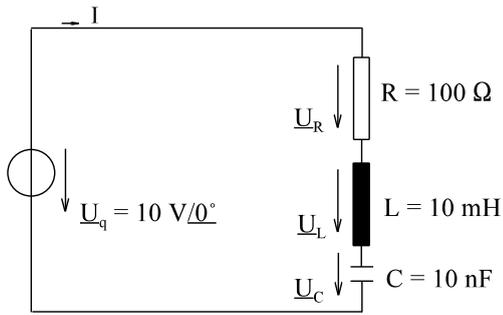
$$\varphi = 0$$

$$\underline{U}_R = \underline{U}_q$$

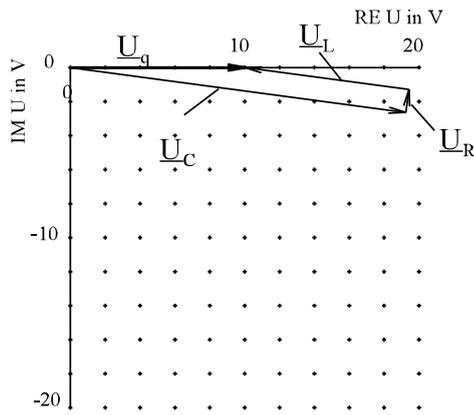
$$\underline{U}_C = -\underline{U}_L$$

$$U_L = U_C = Q * U_q$$

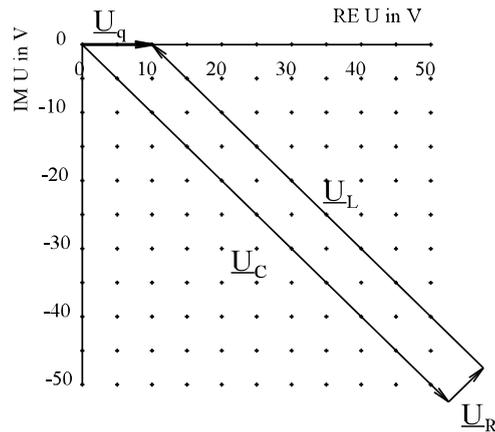
Arbeitsblatt EGII-19



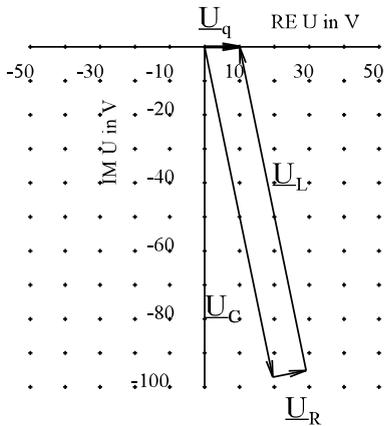
$$\begin{aligned} \omega_0 &= 100 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \\ Q &= 10 \\ \omega_{\text{Band}} &= 10 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \\ \omega_{\text{gr1}} &= 95.1 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \\ \omega_{\text{gr2}} &= 105.1 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$



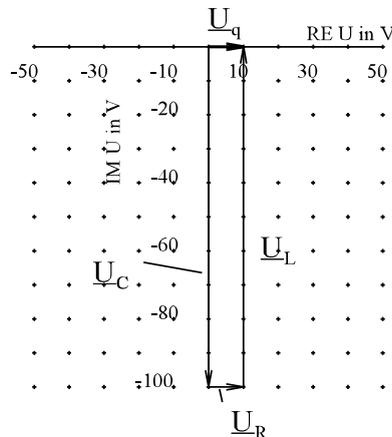
a) $\omega = 70 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$



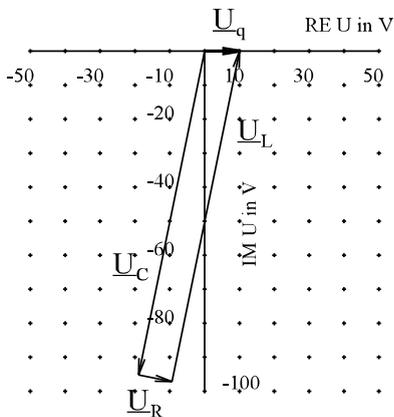
b) $\omega = \omega_{\text{gr1}} = 95.1 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$



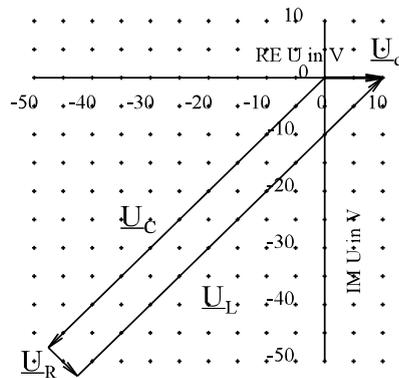
c) $\omega = 99 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$



d) $\omega = \omega_0 = 100 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$



e) $\omega = 101 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$



f) $\omega = \omega_{\text{gr2}} = 105.5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$

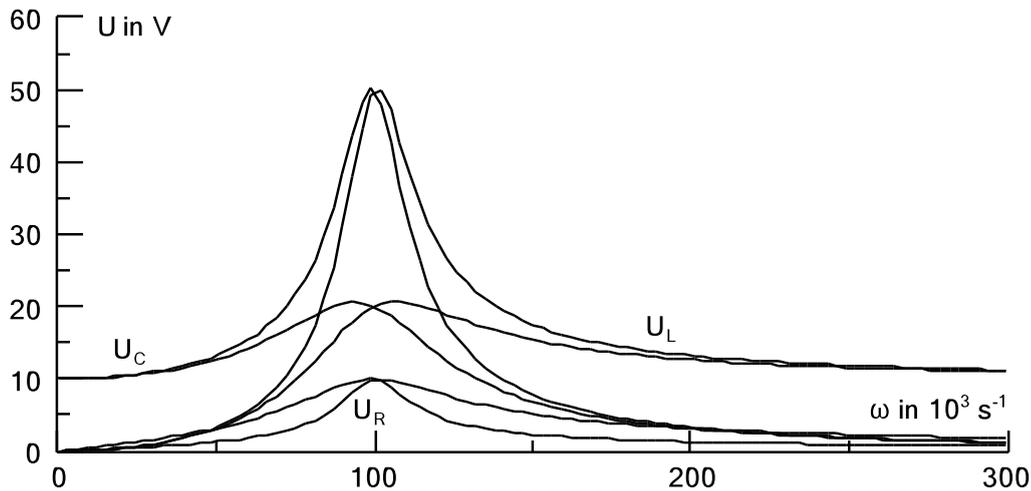


Bild EG6763B: **Ergänzung zu Arbeitsblatt EGII-19:** Spannungen des Reihenschwingkreises für die Güte $Q=2$ und die Güte $Q=5$

Beispiel 2

Ein Reihenschwingkreis mit der Resonanzfrequenz $f_0 = 63.66$ kHz und der Bandbreite $f_{\text{Band}} = B = 1.273$ kHz soll dimensioniert werden. Bei einer Spannung von $U = 10$ V soll ein maximaler Strom $I_{\text{max}} = 500$ mA fließen. Geben Sie das Schaltbild und die Größe der Elemente an.

Lösungsweg:

Gegeben: Reihenschwingkreis

$$f_0 = 63.66 \text{ kHz}$$

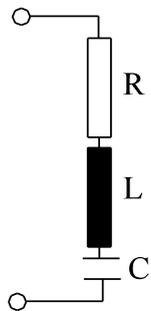
$$\omega_0 = 2\pi \cdot 63,66 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} = 400 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$f_{\text{Band}} = B = 1.273 \text{ kHz}$$

$$\omega_{\text{Band}} = 2\pi \cdot 1.273 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} = 8 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$U = 10 \text{ V}$$

$$I_{\text{max}} = 500 \text{ mA}$$



$$Z_{\text{min}} = \frac{U}{I_{\text{max}}} = R \quad \text{bei } f = f_0$$

$$R = \frac{10 \text{ V}}{0.5 \text{ A}} = 20 \Omega$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_{\text{Band}}} = \frac{400 \text{ kHz}}{8 \text{ kHz}} = 50$$

$$X_0 = R \cdot Q = 20 \Omega \cdot 50 = 1000 \Omega$$

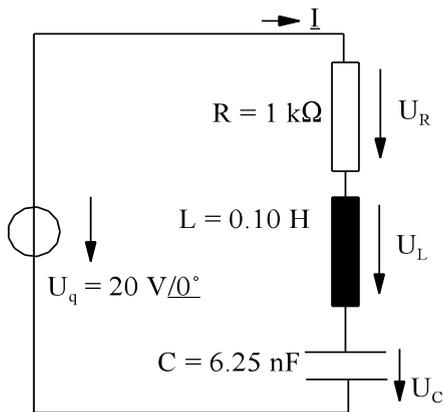
$$X_0 = \omega_0 \cdot L$$

$$L = \frac{X_0}{\omega_0} = \frac{10^3 \frac{\text{V}}{\text{A}}}{400 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}} = 2.5 \text{ mH}$$

$$X_0 = \frac{1}{\omega_0 \cdot C}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0 \cdot X_0} = \frac{1}{400 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 2.5 \text{ nF}$$

Beispiel 3



Bei dem links dargestellten Reihenschwingkreis sind die Spannungen \underline{U}_R , \underline{U}_L und \underline{U}_C zu berechnen für den Resonanzfall.

- Bestimmen Sie die Resonanzkreisfrequenz ω_0 (Resonanzfrequenz f_0)
- Bestimmen Sie die Bandbreite ω_{Band} bzw f_{Band}
- Bestimmen die Grenzfrequenz f_{gr1} und f_{gr2} näherungsweise.
- Bestimmen Sie die komplexen Spannungen \underline{U}_R , \underline{U}_L und \underline{U}_C und den Strom \underline{I} für den Resonanzfall ($f = f_0$, $\omega = \omega_0$). Skizzieren Sie das entsprechende Zeigerdiagramm.

Lösungsweg:

- a) Bestimmen Sie die Resonanzkreisfrequenz ω_0 (Resonanzfrequenz f_0)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{0.10 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 6.25 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}}}} = 40 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{40 \cdot 10^3}{2\pi} = 6.366 \text{ kHz}$$

- b) Bestimmen Sie die Bandbreite ω_{Band} bzw f_{Band}

$$f_{\text{Band}} = \frac{f_0}{Q}$$

$$X_0 = \omega_0 \cdot L = 40 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \cdot 0.1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 4 \text{ k}\Omega$$

$$Q = \frac{X_0}{R} = \frac{4 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega} = 4$$

$$f_{\text{Band}} = \frac{f_0}{Q} = \frac{6.366 \text{ kHz}}{4} = 1.592 \text{ kHz}$$

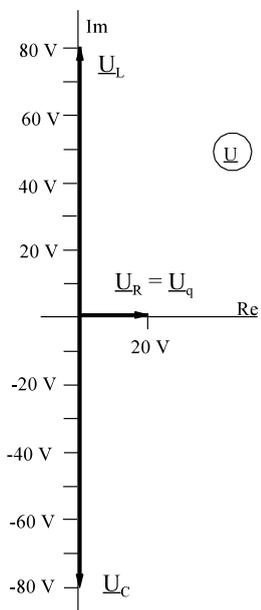
$$\omega_{\text{Band}} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{40 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}}{4} = 10000 \text{ s}^{-1}$$

- c) Bestimmen die Grenzfrequenz f_{gr1} und f_{gr2} näherungsweise.

$$f_{\text{gr1}} = f_0 - \frac{1}{2} \cdot f_{\text{Band}} = 6.366 \text{ kHz} - \frac{1}{2} \cdot 1.592 \text{ kHz} = 5.57 \text{ kHz}$$

$$f_{\text{gr2}} = f_{\text{gr1}} + f_{\text{Band}} = 5.57 \text{ kHz} + 1.59 \text{ kHz} = 7.16 \text{ kHz}$$

- d) Bestimmen Sie die komplexen Spannungen \underline{U}_R , \underline{U}_L und \underline{U}_C und den Strom \underline{I} für den Resonanzfall ($f = f_0$, $\omega = \omega_0$). Skizzieren Sie das entsprechende Zeigerdiagramm.



$$\underline{U}_R = \underline{U}_q = 20 \text{ V} / 0^\circ$$

$$\underline{U}_L = 80 \text{ V} / 90^\circ \quad (\text{eilt vor})$$

$$\underline{U}_L = \underline{U}_C = Q \cdot \underline{U}_R = 4 \cdot 20 \text{ V} = 80 \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = 80 \text{ V} / -90^\circ \quad (\text{eilt nach})$$

6.7.6.4. Parallelschwingkreis

Für den Parallelschwingkreis nach Bild EG6764A soll der Verlauf der Spannung \underline{U} diskutiert werden.

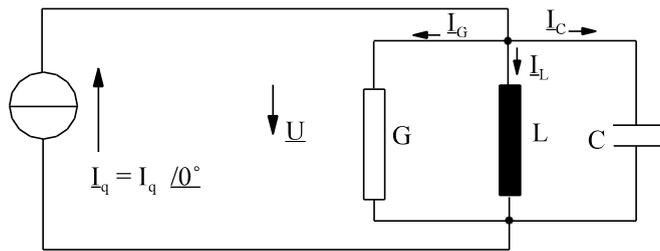


Bild EG6764A

$$\underline{Y} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Die Kreisfrequenz wird auf

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \omega_0^2 L \cdot C = 1$$

normiert:
$$\underline{Y} = G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} \cdot C \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} - \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\sqrt{L \cdot C}}{L}\right) = G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}\right)$$

mit
$$B_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{X_0}$$

ergibt sich:
$$\underline{Y} = G + jB_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

Mit
$$B_0 = G \cdot Q \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{B_0}{G} = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

und
$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

kann man angeben:
$$\underline{Y} = G\left[1 + jQ(\Omega - \Omega^{-1})\right]$$

Die Spannung \underline{U} kann berechnet werden:
$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_q}{\underline{Y}} = \frac{I_q}{G} \cdot \frac{1}{1 + jQ(\Omega - \Omega^{-1})}$$

Der rechte Teil des oberen Ausdrucks ist schon vom Reihenschwingkreis her bekannt, die auf Arbeitsblatt EGII-18 dargestellten Funktionen:

$$F = \frac{1}{1 + jQ(\Omega - \Omega^{-1})}$$

$$\underline{U} = \underline{I}_q \cdot R \cdot F(\Omega)$$

Bei Resonanz weisen die Blindleitwerte von L und C betragsmäßig gleiche Werte auf und sind im Vorzeichen unterschiedlich. Damit heben sich I_C und I_G auf. Der gesamte Strom fließt durch den Leitwert G, siehe Beispiel 2.

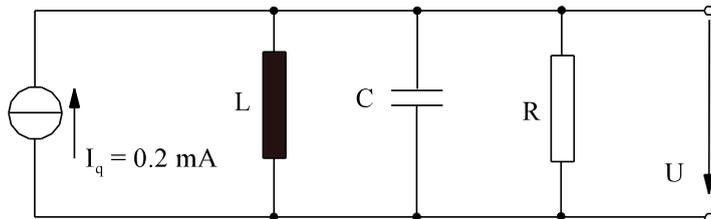
Weit außerhalb der Resonanz wirkt entweder L (bei kleinen Frequenzen) oder C (bei hohen Frequenzen) als Kurzschluss und der Strom fließt nicht durch den Leiterwert G.

Beispiel 1:

Ein Parallelschwingkreis mit der Resonanzfrequenz $f_0 = \frac{100 \cdot 10^3}{2\pi} \text{ Hz}$ und der Bandbreite von

$f_{\text{Band}} = \frac{5 \cdot 10^3}{2\pi} \text{ Hz}$ soll dimensioniert werden. Bei einem Eingangsstrom von $I = 0.2 \text{ mA}$ soll eine maximale

Spannung von $U_{\text{max}} = 20 \text{ V}$ vorhanden sein. Geben Sie das Schaltbild und die Größe der Elemente an:

Lösungsweg:

$$U_{\text{max}} = I_q \cdot R \quad \text{für den Resonanzfall}$$

$$R = \frac{U_{\text{max}}}{I_q} = \frac{20 \text{ V}}{0.2 \text{ mA}} = 100 \text{ k}\Omega$$

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = 100 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_{\text{Band}} = 2\pi \cdot f_{\text{Band}} = 5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_{\text{Band}}} = \frac{f_0}{f_{\text{Band}}} = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}}{5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}} = 20$$

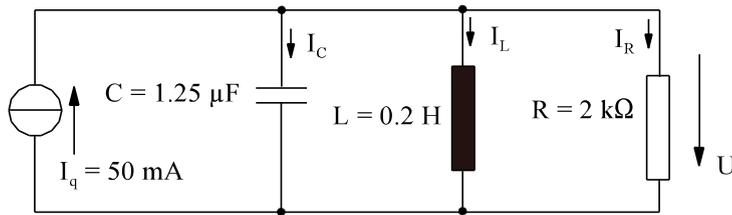
$$X_0 = \frac{R}{Q} = \frac{100 \text{ k}\Omega}{20} = 5 \text{ k}\Omega$$

$$L = \frac{X_0}{\omega_0} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ V/A}}{100 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}} = 50 \text{ mH}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0 \cdot X_0} = \frac{1}{10^5 \text{ s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ V/A}} = 2 \text{ nF}$$

Beispiel 2:

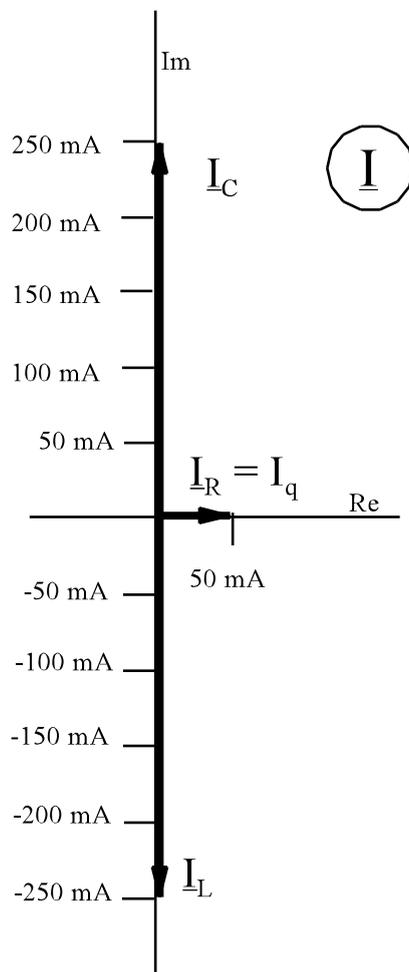
Bei dem dargestellten Parallelschwingkreis sind für den Fall der Resonanz Spannung \underline{U} und die Ströme \underline{I}_R , \underline{I}_L und \underline{I}_C zu berechnen und in der komplexen Ebene darzustellen.



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{0.2 \frac{Vs}{A} \cdot 1.25 \cdot 10^{-6} \frac{As}{V}}} = 2000 \text{ s}^{-1}$$

$$X_0 = \omega_0 \cdot L = 2000 \text{ s}^{-1} \cdot 0.2 \text{ H} = 400 \text{ } \Omega$$

$$Q = \frac{R}{X_0} = \frac{2 \text{ k}\Omega}{0.4 \text{ k}\Omega} = 5$$

**Resonanz:**

$$\underline{U} = R \cdot I_q = 50 \text{ mA} \cdot 2 \text{ k}\Omega = 100 \text{ V } /0^\circ$$

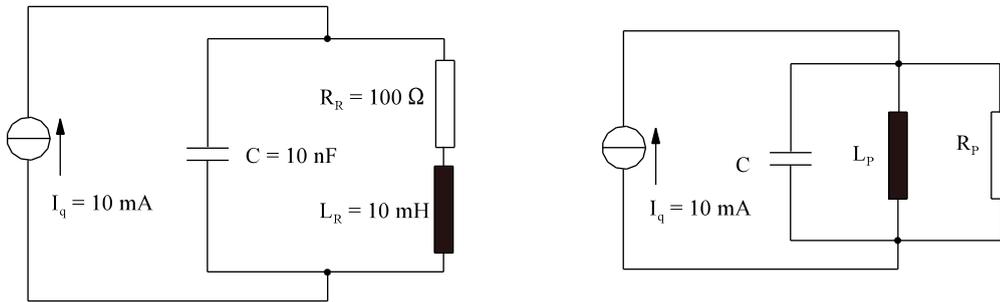
$$I_L = I_C = Q \cdot I_q = 5 \cdot 50 \text{ mA} = 250 \text{ mA}$$

$$I_C = I_C /90^\circ = 250 \text{ mA } /90^\circ \quad (\text{eilt vor})$$

$$I_L = I_L /-90^\circ = 250 \text{ mA } /-90^\circ \quad (\text{eilt nach})$$

Beispiel 3:

Von dem links dargestellte **realen** Parallelschwingkreis soll der Betragsgang des Frequenzganges mit bekannten Formeln dargestellt werden.



Methode: Umwandlung Reihenschaltung => Parallelschaltung, siehe rechtes Bild.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C \cdot L_R}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-9} \frac{Vs}{A} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \frac{As}{V}}} = 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$X_0 = \omega_0 \cdot L = 10^5 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \frac{Vs}{A} = 1000 \Omega = X_R$$

$$R_P = \frac{R_R^2 + X_R^2}{R_R} = \frac{(100 \Omega)^2 + (1000 \Omega)^2}{100 \Omega} = 101 \text{ k}\Omega$$

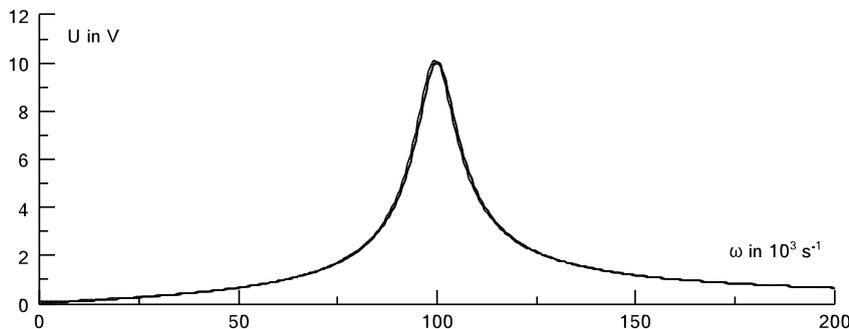
$$X_P = \frac{R_R^2 + X_R^2}{X_R} = \frac{(100 \Omega)^2 + (1000 \Omega)^2}{1000 \Omega} = 101 \text{ k}\Omega$$

$$L_P = \frac{X_P}{\omega_0} = \frac{1.01 \cdot 10^3 \text{ V/A}}{10^5 \text{ s}^{-1}} = 10.1 \text{ mH}$$

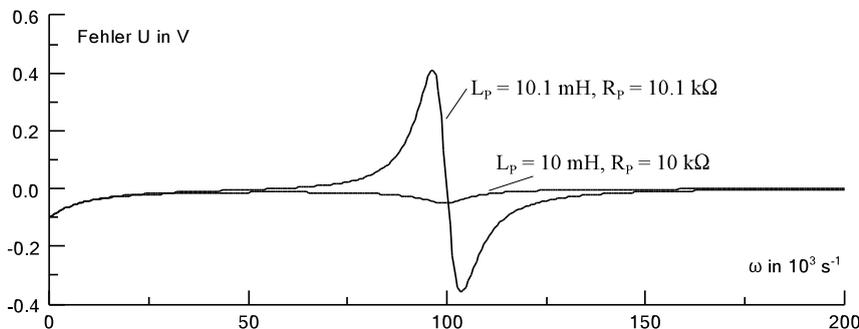
$$\omega_{0P} = \frac{1}{\sqrt{L_P \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{10.1 \cdot 10^{-3} \frac{Vs}{A} \cdot 10 \cdot 10^{-9} \frac{As}{V}}} = 9950 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Mit L_P , ω_{0P} und C kann die Spannung U nun mit $\Omega = \omega/\omega_{0P}$ ermittelt werden:

$$\underline{U}(\Omega) = I_q \cdot R_P \cdot \underline{F}(\Omega) = \frac{I_q \cdot R_P}{1 + jQ \cdot (\Omega - 1/\Omega)} \tag{A}$$



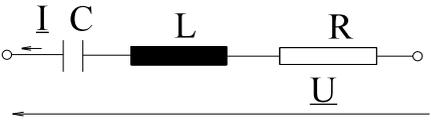
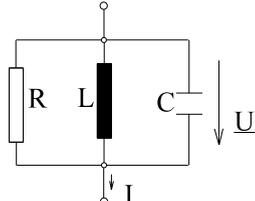
Im linken Bild ist die obere Näherung (A) und der exakte Verlauf dargestellt. Ein Unterschied kann kaum erkannt werden.



Im linken Bild ist die Abweichung des Verlauf (A) zum exakten dargestellt. Mit den Werten $L_P = 10 \text{ mH}$, $R_P = 10 \text{ k}\Omega$ ist die schon geringe Abweichung noch verringernbar. (B)

Arbeitsblatt EGII-20

6.7.6.5. Vergleich: Reihen- und Parallelschwingkreis

	
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$	
$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$	$Q = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$
$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$ $\underline{F}(\Omega) = \frac{1}{1 + jQ(\Omega - \Omega^{-1})}$	
<p style="text-align: center;">Grenzfrequenzen</p> $f_{\text{gr}1,2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} \left[\mp \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right]$	
<p style="text-align: center;">Bandbreite</p> $f_{\text{Band}} = \frac{f_0}{Q} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C} \cdot Q}$	
$\underline{Z} = R \cdot [1 + jQ(\Omega - \Omega^{-1})]$ $\underline{Y} = \frac{1}{R} \cdot \underline{F}(\Omega)$ $\underline{Z} = R \cdot \underline{F}^{-1}(\Omega)$	$\underline{Z} = R \cdot \frac{1}{1 + jQ(\Omega - \Omega^{-1})}$ $\underline{Z} = R \cdot \underline{F}(\Omega)$ $\underline{Y} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\underline{F}(\Omega)}$
<p>Resonanz: ($\omega = \omega_0, \Omega = 1$)</p> $U_L = U_C = Q \cdot U_R$ $\underline{U}_R = \underline{U}$ $\underline{U}_L = jQ \cdot \underline{U} \quad \underline{U}_C = -\underline{U}_L = -jQ \cdot \underline{U}$ $Z = R$	<p>Resonanz: ($\omega = \omega_0, \Omega = 1$)</p> $I_L = I_C = Q \cdot I_R$ $\underline{I}_R = \underline{I}$ $\underline{I}_C = jQ \cdot \underline{I} \quad \underline{I}_L = -\underline{I}_C = -jQ \cdot \underline{I}$ $Z = R$
$\omega \ll \omega_0, \omega \gg \omega_0$ $Z \gg R$	$\omega \ll \omega_0, \omega \gg \omega_0$ $Z \ll R$
<p>Fazit:</p> <p>Q groß => R klein => Kurzschluss bei Resonanz Leerlauf außerhalb Resonanz</p>	<p>Fazit:</p> <p>Q groß => R groß => Leerlauf bei Resonanz Kurzschluss außerhalb Resonanz</p>

6.7.6.6. Fragen und Aufgaben zu Abschnitt 6.7.6

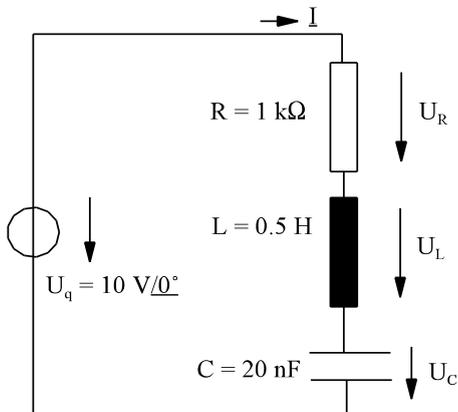
Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.6.7.6.A	Bei einem Schwingkreis können folgende Schwingungsarten auftreten: * freie Schwingungen * erzwungene Schwingungen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.B	Das Prinzip eines allgemein Schwingkreises basiert auf dem Austausch von: * Energie * Masse * Spannungen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.C	Für Zeiten $t \rightarrow \infty$ treten auf: * freie Schwingungen * erzwungene Schwingungen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.D	Für Zeiten $t \approx 0$ treten auf: * freie Schwingungen * erzwungene Schwingungen	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.E	Ein Reihenschwingkreis wirkt außerhalb der Resonanz als : * Kurzschluss * Leerlauf	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.F	Ein Reihenschwingkreis wirkt bei der Resonanz als : * Kurzschluss * Leerlauf	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.G	Der Grund für den Leerlauf des Reihenschwingkreises außerhalb der Resonanz ist: * bei tiefen Frequenzen der Leerlauf von L * bei tiefen Frequenzen der Leerlauf von C * bei hohen Frequenzen der Leerlauf von L * bei hohen Frequenzen der Leerlauf von C	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.H	Der Grund für den Kurzschluss des Reihenschwingkreises bei Resonanz ist: * das gleiche Vorzeichen bei gleichen Betrag von U_L und U_C * das ungleiche Vorzeichen bei gleichen Betrag von U_L und U_C * das gleiche Vorzeichen bei ungleichen Betrag von U_L und U_C * das ungleiche Vorzeichen bei ungleichen Betrag von U_L und U_C	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.I	Die Spannungsüberhöhung beim Reihenschwingkreis bei Resonanz tritt auf an: * R * L * C	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.J	Die Spannungsüberhöhung beim Reihenschwingkreis an L und C, bezogen auf die Eingangsspannung beträgt: * R/X_0 * die Güte Q * X_0/R	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.K	Bei einem Reihenschwingkreis sollte sein: * R nicht zu groß * R nicht zu klein	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.L	Ein Parallelschwingkreis wirkt außerhalb der Resonanz als : * Kurzschluss * Leerlauf	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.M	Ein Parallelschwingkreis wirkt bei der Resonanz als : * Kurzschluss * Leerlauf	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.N	Der Grund für den Kurzschluss des Parallelschwingkreises außerhalb der Resonanz ist: * bei tiefen Frequenzen der Kurzschluss von L * bei tiefen Frequenzen der Kurzschluss von C * bei hohen Frequenzen der Kurzschluss von L * bei hohen Frequenzen der Kurzschluss von C	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.O	Die Stromüberhöhung beim Parallelschwingkreis bei Resonanz tritt auf an: * R * L * C	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.P	Die Stromüberhöhung beim Parallelschwingkreis an L und C, bezogen auf den Eingangsstrom beträgt: * R/X_0 * die Güte Q * X_0/R	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.6.7.6.Q	Bei einem Parallelschwingkreis sollte sein: * R nicht zu groß * R nicht zu klein	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

<p>Frage 6.7.6.A Ein Reihenschwingkreis wirkt außerhalb der Resonanz als :</p> <p>_____</p>
<p>Frage 6.7.6.B Ein Reihenschwingkreis wirkt bei der Resonanz als :</p> <p>_____</p>
<p>Frage 6.7.6.C Der Grund für den Leerlauf des Reihenschwingkreises außerhalb der Resonanz ist</p> <p>* für tiefe Frequenzen _____</p> <p>* für hohe Frequenzen _____</p>
<p>Frage 6.7.6.D Die Spannungsüberhöhung beim Reihenschwingkreis bei Resonanz tritt auf an:</p> <p>_____</p>
<p>Frage 6.7.6.E Die Spannungsüberhöhung beim Reihenschwingkreis an L und C, bezogen auf die Eingangsspannung beträgt:</p> <p>_____</p>
<p>Frage 6.7.6.F Bei einem Reihenschwingkreis sollte die Größe von R sein :</p> <p>_____</p>
<p>Frage 6.7.6.G Ein Parallelschwingkreis wirkt außerhalb der Resonanz als :</p> <p>_____</p>
<p>Frage 6.7.5.H Ein Parallelschwingkreis wirkt bei der Resonanz als :</p> <p>_____</p>
<p>Frage 6.7.6.I Der Grund für den Kurzschluss des Parallelschwingkreises außerhalb der Resonanz ist</p> <p>* für tiefe Frequenzen _____</p> <p>* für hohe Frequenzen _____</p>
<p>Frage 6.7.6.J Der Grund für den Leerlauf des Parallelschwingkreises bei Resonanz ist:</p> <p>_____</p>
<p>Frage 6.7.6.K Die Stromüberhöhung beim Parallelschwingkreis bei Resonanz tritt auf an:</p> <p>_____</p>
<p>Frage 6.7.6.L Die Stromüberhöhung beim Parallelschwingkreis an L und C, bezogen auf den Eingangsstrom beträgt:</p> <p>_____</p>
<p>Frage 6.7.6.M Bei einem Parallelschwingkreis sollte die Größe von R sein :</p> <p>_____</p>
<p>Frage 6.7.5.L Bei einem Schwingkreis können folgende Schwingungsarten auftreten:</p> <p>_____</p>

Aufgabe 6.7.6 A

Ein Bandpass 2.Ordnung (Reihenschwingkreis) ist zu dimensionieren. Bei einer Resonanzfrequenz von $f_0 = \frac{50}{2\pi} * 10^3 \text{ Hz}$ soll sich eine Bandbreite von $f_{\text{Band}} = B = \frac{2}{2\pi} * 10^3 \text{ Hz}$ einstellen. Bei $U = 8 \text{ V}$ soll die Quelle mit maximal $I_{\text{max}} = 50 \text{ mA}$ belastet werden.

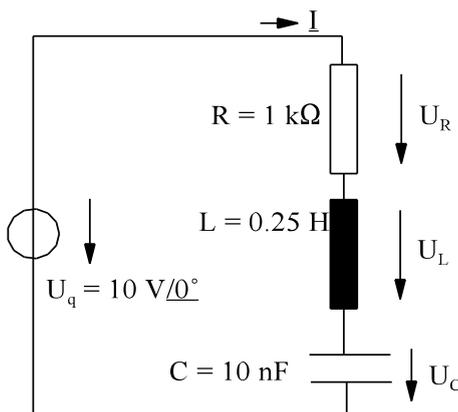
- Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild.
- Bestimmen Sie die Elemente des Ersatzschaltbildes.

Aufgabe 6.7.6 B

Bei dem links dargestellten Reihenschwingkreis sind die Spannungen \underline{U}_R , \underline{U}_L und \underline{U}_C zu berechnen für den Resonanzfall.

- Bestimmen Sie die Resonanzkreisfrequenz ω_0 (Resonanzfrequenz f_0)
- Bestimmen Sie die komplexen Spannungen \underline{U}_R , \underline{U}_L und \underline{U}_C und den Strom \underline{I} für den Resonanzfall ($f=f_0$, $\omega = \omega_0$). Skizzieren Sie das entsprechende Zeigerdiagramm.
- Berechnen Sie die Grenzfrequenzennäherungsweise.

Hinweis: Auch eine aufwendige Berechnung führt zum Ziel. Überlegungen verkürzen den Aufwand erheblich.

Aufgabe 6.7.6 C

Bei dem links dargestellten Reihenschwingkreis sind die Spannungen \underline{U}_R , \underline{U}_L und \underline{U}_C zu berechnen für den Resonanzfall und für die zwei Grenzfrequenzen.

- Bestimmen Sie die Resonanzkreisfrequenz ω_0 (Resonanzfrequenz f_0)
- Bestimmen Sie die Bandbreite ω_{Band} bzw f_{Band}
- Bestimmen die Grenzfrequenz f_{gr1} und f_{gr2} näherungsweise.
- Bestimmen die Grenzfrequenz f_{gr1} und f_{gr2} exakt.
- Bestimmen Sie die komplexen Spannungen \underline{U}_R , \underline{U}_L und \underline{U}_C und den Strom \underline{I} für den Resonanzfall ($f=f_0$, $\omega = \omega_0$). Skizzieren Sie das entsprechende Zeigerdiagramm.
- Bestimmen Sie die komplexen Spannungen \underline{U}_R , \underline{U}_L und \underline{U}_C und den Strom \underline{I} für die untere Grenzfrequenz ($f=f_{\text{gr1}}$, $\omega = \omega_{\text{gr1}}$). Skizzieren Sie das entsprechende Zeigerdiagramm.
- Bestimmen Sie die komplexen Spannungen \underline{U}_R , \underline{U}_L und \underline{U}_C und den Strom \underline{I} für die obere Grenzfrequenz ($f = f_{\text{gr1}}$, $\omega = \omega_{\text{gr1}}$). Skizzieren Sie das entsprechende Zeigerdiagramm.

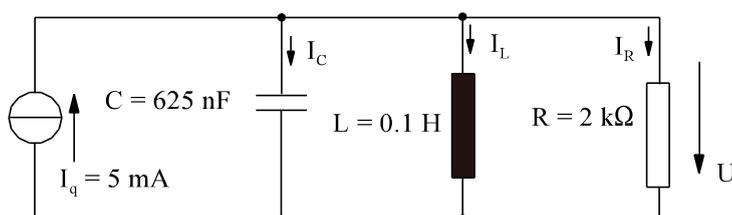
Hinweis: Für die Aufgabenpunkte e) bis f) führt auch eine aufwendige Berechnung zum Ziel. Überlegungen verkürzen den Aufwand erheblich.

Aufgabe 6.7.6 D

Ein Parallelschwingkreis mit der Resonanzfrequenz $f_0 = \frac{20 * 10^6}{2\pi} \text{ Hz}$ und der Bandbreite von

$f_{\text{Band}} = \frac{2 * 10^6}{2\pi} \text{ Hz}$ soll dimensioniert werden. Bei einem Eingangsstrom von $I = 5 \text{ mA}$ soll eine maximale

Spannung von $U_{\text{max}} = 10 \text{ V}$ vorhanden sein. Geben Sie das Schaltbild und die Größe der Elemente an:

Aufgabe 6.7.6. E

Bei dem dargestellten Parallelschwingkreis sind für den Fall der Resonanz Spannung \underline{U} und die Ströme \underline{I}_R , \underline{I}_L und \underline{I}_C zu berechnen und in der komplexen Ebene darzustellen.

6.8. Lineare Wechselstrom-Netze	175
6.8.1. Einleitung	175
6.8.1.1. Unterschied: Gleichstrom- Wechselstromrechnung	175
6.8.2. Komplexe Tips für den Taschenrechner	176
6.8.3. Komplexe Gleichungssysteme	176
6.8.4. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze	180
6.8.5. Komplexes Maschenstrom-Verfahren	182
6.8.6. Komplexes Maschenstrom Verfahren für Rechner	184
6.8.7. Dreieck-Stern und Stern-Dreieck-Umwandlung	187
6.8.8. Quellen-Umwandlung	188
6.8.9. Überlagerungsprinzip	190
6.8.10. Ersatzquellen	191
6.8.11. Komplexes Knotenpunkt-Potential-Verfahren	194
6.8.12. Komplexes Knotenpunkt-Potential-Verfahren für Rechner	197

6.8. Lineare Wechselstrom-Netze

6.8.1. Einleitung

6.8.1.1. Unterschied: Gleichstrom- Wechselstromrechnung

Bei der Berechnung von Gleichstromnetzen wurden im Kap. 3 (1. Semester) die folgenden Berechnungsverfahren vorgestellt:

- 3.1. Einleitung
- 3.2. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze
- 3.3. Maschenstrom-Verfahren
- 3.4. Netz-Umwandlung
 - 3.4.1. Ersatzwiderstand
 - 3.4.2. Quellenumwandlung
 - 3.4.3. Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung
 - 3.4.4. Verlegung idealer Strom-Quellen
 - 3.4.5. Umwandlung idealer Quellen
- 3.5. Überlagerungssatz
- 3.6. Ersatzquelle
- 3.7. Knotenpunkt-Potential-Verfahren
- 3.8. Symmetrie-Überlegungen

Alle oberen Verfahren zur Netzberechnung können auch zur Wechselstromberechnung angewandt werden. Dazu soll der Unterschied zwischen der Gleichstrom- und der Wechselstromrechnung noch einmal hervorgehoben werden.

Bei der Gleichstromberechnung ist jede Größe ein reeller Parameter zugeordnet.

Beispiel:

$$U_5 = 20 \text{ V} \qquad I_5 = 2 \text{ A} \qquad R_5 = 10 \text{ } \Omega$$

Bei der linearen Wechselstromrechnung ergeben sich harmonische Größen, z. B.

$$u_5(t) = \hat{u}_5 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{u5})$$

$$i_5(t) = \hat{i}_5 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i5})$$

die durch Betrag und Phase bei einer bestimmten Frequenz ausreichend beschrieben werden. Jede Größe wird nicht im Zeitverlauf betrachtet, sondern die zu den oberen Größen zugehörigen Effektivwertzeiger werden betrachtet:

$$\underline{U}_5 = \frac{\hat{u}_5}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_{u5}} = U_5 \cdot e^{j\varphi_{u5}} \qquad U_5 = \frac{\hat{u}_5}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\hat{i}_5}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi_{i5}} = I_5 \cdot e^{j\varphi_{i5}} \qquad I_5 = \frac{\hat{i}_5}{\sqrt{2}}$$

Das ohmsche Gesetz für den Wechselstromkreis lautet:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \qquad \underline{U} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}}$$

Der komplexe Widerstand bzw. Leitwert ergibt sich

$$\underline{Z} = R + jX \qquad \underline{Y} = G + jY$$

Einen Überblick zeigt Tabelle EG6811A

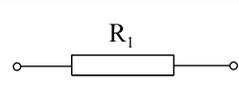
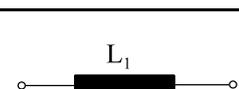
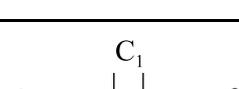
	$\underline{Z} = R_1$	$R = R_1$ $X = 0$	$\underline{Y} = \frac{1}{R_1}$	$G = \frac{1}{R_1}$ $B = 0$
	$\underline{Z} = j\omega L_1 = jX$	$R = 0$ $X = \omega L_1$	$\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L_1} = jB$	$G = 0$ $B = -\frac{1}{\omega L_1}$
	$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C_1} = jX$	$R = 0$ $X = -\frac{1}{\omega C_1}$	$\underline{Y} = j\omega C_1 = jB$	$G = 0$ $B = \omega C_1$

Tabelle EG6811A

Nach Tabelle EG681A ergibt sich für jedes passive Element ein komplexer Widerstand oder Leitwert, der wie die Spannung oder die Ströme aus jeweils zwei Komponenten bestehen.

Damit können nun alle Gesetze des Gleichstroms auf Wechselstrom übertragen werden. Nur muß hier mit komplexen Variablen und Zahlen gerechnet werden.

In den nächsten Abschnitten soll behandelt werden:

- Tips für das komplexe Rechnen mit dem Taschenrechner werden in Abschnitt 6.8.2 gegeben.
- Die Gleichstrom-Verfahren aus Kap. 3 unterscheiden sich grob in welche mit und ohne Gleichungssystem zu lösen. Die Behandlung komplexer Gleichungssysteme wird in Abschnitt 6.8.3 aufgezeigt.
- In den folgenden Abschnitten erfolgt eine Wiederholung der Gleichstrom-Methoden, angewandt an Wechselstrom-Beispielen.

6.8.2. Komplexe Tips für den Taschenrechner

Nachdem im ersten Semester die Grundlagen der komplexen Rechnung erarbeitet wurden, sollen im zweiten Semester folgende Operationen per Knopfdruck vom Rechner ausgeführt werden, die als Minimalforderung an einen Taschenrechner zu stellen sind (evtl. zu programmieren)

- Eingabe komplexer Zahlen
- Umwandlung komplexer Zahlen (kartesisch-polar)
- Multiplikation, Division, Addition, Subtraktion sollen nicht mehr manuell per Komponenten ausgeführt werden.

Zusätzlich nützliche Optionen wären von Vorteil:

- Speicherung komplexer Zahlen (gut: unter Namen)

Optimal wäre ein Rechner wie z.B. der HP48, der die folgenden zusätzlichen idealen Möglichkeiten bietet:

- Speicherung komplexer Variabler, Vektoren und Matrizen mit speziellen Namen
- Aufruf der Variablen durch Menü oder Namen
- komplexe Matrizen und Vektorrechnung
- Inversion komplexer Matrizen
- Lösung komplexer Gleichungssysteme

6.8.3. Komplexe Gleichungssysteme

Wiederholung: Das reelle Gleichungssystem hat in Matrix-Schreibweise die Form:

$$\overline{A} * \overline{x} = \overline{k}$$

Der Strich zur Kennzeichnung von Matrizen und Vektoren wurde mit Absicht über dem Symbol gewählt. Für den Fall zweiter Ordnung ergaben sich die Komponenten:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \overline{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Bei der Wechselstromrechnung müssen alle Elemente (Zahlen, Konstanten, Variable, Vektoren und Matrizen) zu

komplexen Elementen erweitert werden. Für das obere Gleichungssystem im Komplexen ergibt sich:

$$\underline{\bar{A}} * \underline{\bar{x}} = \underline{\bar{k}}$$

Strich drunter => komplex
Strich drüber => Matrix, Vektor

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{re} + ja_{11}^{im} & a_{12}^{re} + ja_{12}^{im} \\ a_{21}^{re} + ja_{21}^{im} & a_{22}^{re} + ja_{22}^{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{re} + jx_1^{im} \\ x_2^{re} + jx_2^{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^{re} + jk_1^{im} \\ k_2^{re} + jk_2^{im} \end{pmatrix}$$

mit den Komponenten

$$\underline{\bar{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{re} + ja_{11}^{im} & a_{12}^{re} + ja_{12}^{im} \\ a_{21}^{re} + ja_{21}^{im} & a_{22}^{re} + ja_{22}^{im} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\bar{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{re} + jx_1^{im} \\ x_2^{re} + jx_2^{im} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\bar{k}} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^{re} + jk_1^{im} \\ k_2^{re} + jk_2^{im} \end{pmatrix}$$

Das Aufstellen dieses Gleichungssystems wird später erläutert. In diesem Abschnitt soll deren Lösung diskutiert werden. Falls ein Rechner mit Programm zur Verfügung steht, der komplexe lineare Gleichungssysteme lösen kann, ist noch weitere Arbeit erforderlich, außer der Eingabe von $\underline{\bar{A}}$ und $\underline{\bar{k}}$.

Viele Rechner haben die Möglichkeit, reelle lineare Gleichungssysteme zu lösen. Die Umformung zu einem reellen Gleichungssystem erfolgt durch Aufspaltung der Matrizen und Vektoren in reelle Matrizen und Vektoren.

$$\underline{\bar{A}} = \underline{\bar{A}}^{re} + j \underline{\bar{A}}^{im} = \begin{pmatrix} a_{11}^{re} & a_{12}^{re} \\ a_{21}^{re} & a_{22}^{re} \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} a_{11}^{im} & a_{12}^{im} \\ a_{21}^{im} & a_{22}^{im} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\bar{A}}^{re} = \begin{pmatrix} a_{11}^{re} & a_{12}^{re} \\ a_{21}^{re} & a_{22}^{re} \end{pmatrix} \quad \underline{\bar{A}}^{im} = \begin{pmatrix} a_{11}^{im} & a_{12}^{im} \\ a_{21}^{im} & a_{22}^{im} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\bar{x}} = \underline{\bar{x}}^{re} + j \underline{\bar{x}}^{im} = \begin{pmatrix} x_1^{re} \\ x_2^{re} \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} x_1^{im} \\ x_2^{im} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\bar{x}}^{re} = \begin{pmatrix} x_1^{re} \\ x_2^{re} \end{pmatrix} \quad \underline{\bar{x}}^{im} = \begin{pmatrix} x_1^{im} \\ x_2^{im} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\bar{k}} = \underline{\bar{k}}^{re} + j \underline{\bar{k}}^{im} = \begin{pmatrix} k_1^{re} \\ k_2^{re} \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} k_1^{im} \\ k_2^{im} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\bar{k}}^{re} = \begin{pmatrix} k_1^{re} \\ k_2^{re} \end{pmatrix} \quad \underline{\bar{k}}^{im} = \begin{pmatrix} k_1^{im} \\ k_2^{im} \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich das komplexe Gleichungssystem

$$\underline{\bar{A}} * \underline{\bar{x}} = \underline{\bar{k}}$$

umschreiben in

$$(\underline{\bar{A}}_{re} + j \underline{\bar{A}}_{im}) * (\underline{\bar{x}}_{re} + j \underline{\bar{x}}_{im}) = \underline{\bar{k}}_{re} + j \underline{\bar{k}}_{im}$$

Ausmultipliziert ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{re} * \bar{x}_{re} + j \bar{A}_{im} * \bar{x}_{re} + j \bar{A}_{re} * \bar{x}_{im} - \bar{A}_{im} * \bar{x}_{im} &= \bar{k}_{re} + j \bar{k}_{im} \\ (\bar{A}_{re} * \bar{x}_{re} - \bar{A}_{im} * \bar{x}_{im}) + j(\bar{A}_{im} * \bar{x}_{re} + \bar{A}_{re} * \bar{x}_{im}) &= \bar{k}_{re} + j \bar{k}_{im} \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen bzw. Gleichungen sind nur gleich, wenn Realteil und Imaginärteil identisch sind. Die obere Gleichung wird dadurch Aufspalten in zwei Gleichungen

$$\text{Realteil} \quad \Rightarrow \quad \bar{A}_{re} * \bar{x}_{re} - \bar{A}_{im} * \bar{x}_{im} = \bar{k}_{re}$$

$$\text{Imaginärteil} \quad \Rightarrow \quad \bar{A}_{im} * \bar{x}_{re} + \bar{A}_{re} * \bar{x}_{im} = \bar{k}_{im}$$

Damit ergibt sich ein Gleichungssystem 2.Ordnung für die Vektoren \bar{x}_{re} und \bar{x}_{im} . Die Variablen und Teilmatrizen können wie reelle Variable behandelt werden und zu einem Gleichungssystem zusammengefasst werden.

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_{re} & -\bar{A}_{im} \\ \bar{A}_{im} & \bar{A}_{re} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_{re} \\ \bar{x}_{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{k}_{re} \\ \bar{k}_{im} \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich mit den erweiterten Matrizen und Vektoren

$$\bar{A}_{erw} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{re} & -\bar{A}_{im} \\ \bar{A}_{im} & \bar{A}_{re} \end{pmatrix} \quad \bar{x}_{erw} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{re} \\ \bar{x}_{im} \end{pmatrix} \quad \bar{k}_{erw} = \begin{pmatrix} \bar{k}_{re} \\ \bar{k}_{im} \end{pmatrix}$$

auch ein erweitertes Gleichungssystem:

$$\bar{A}_{erw} * \bar{x}_{erw} = \bar{k}_{erw}$$

Die Dimension der Erweiterung ist doppelt so groß, als die des komplexen Gleichungssystems.

Für das schon erwähnte komplexe Gleichungssystem 2. Ordnung ergibt mit

$$\bar{A}_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11}^{re} & a_{12}^{re} & -a_{11}^{im} & -a_{12}^{im} \\ a_{21}^{re} & a_{22}^{re} & -a_{21}^{im} & -a_{22}^{im} \\ a_{11}^{im} & a_{12}^{im} & a_{11}^{re} & a_{12}^{re} \\ a_{21}^{im} & a_{22}^{im} & a_{21}^{re} & a_{22}^{re} \end{pmatrix} \quad \bar{x}_{erw} = \begin{pmatrix} x_1^{re} \\ x_2^{re} \\ x_1^{im} \\ x_2^{im} \end{pmatrix} \quad \bar{k}_{erw} = \begin{pmatrix} k_1^{re} \\ k_2^{re} \\ k_1^{im} \\ k_2^{im} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{re} & a_{12}^{re} & -a_{11}^{im} & -a_{12}^{im} \\ a_{21}^{re} & a_{22}^{re} & -a_{21}^{im} & -a_{22}^{im} \\ a_{11}^{im} & a_{12}^{im} & a_{11}^{re} & a_{12}^{re} \\ a_{21}^{im} & a_{22}^{im} & a_{21}^{re} & a_{22}^{re} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1^{re} \\ x_2^{re} \\ x_1^{im} \\ x_2^{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^{re} \\ k_2^{re} \\ k_1^{im} \\ k_2^{im} \end{pmatrix}$$

Damit ist ein reelles Gleichungssystem 4. Ordnung (doppelter Ordnung als das komplexe für die Variablen x_1^{re} , x_2^{re} , x_1^{im} und x_2^{im} entstanden).

Schema: Umformung komplexes Gleichungssystem in ein reelles Gleichungssystem

gegeben: komplexes Gleichungssystem n. Ordnung.

$$\underline{\bar{A}} * \underline{\bar{x}} = \underline{\bar{k}}$$

A] Reelles Gleichungssystem der Ordnung 2n aufstellen.

$$\underline{\bar{A}}_{erw} * \underline{\bar{x}}_{erw} = \underline{\bar{k}}_{erw}$$

B] Die Matrix $\underline{\bar{A}}_{erw}$ in vier gleiche Teile aufspalten.

C] Den Realteil von $\underline{\bar{A}}$, $\text{Re}\{\underline{\bar{A}}\}$, in der Hauptdiagonalen positiv eintragen, oben links und unten rechts.

D] Der Imaginärteil von $\underline{\bar{A}}$, $\text{Im}\{\underline{\bar{A}}\}$, wandert in die Nebendiagonalen, unten links mit positiven Vorzeichen und oben rechts mit negativen Vorzeichen.

E] Variablenvektor $\underline{\bar{x}}_{erw}$ und Anregungsvektor $\underline{\bar{k}}_{erw}$ in zwei Teile aufspalten. Den Realteil $\text{Re}\{\underline{\bar{x}}\}$ bzw. $\text{Re}\{\underline{\bar{k}}\}$ jeweils oben eintragen und den Imaginärteil $\text{Im}\{\underline{\bar{x}}\}$ bzw. $\text{Im}\{\underline{\bar{k}}\}$ unten eintragen.

F] Reelles Gleichungssystem lösen

G] Komplexe Variablen ergeben sich aus Real- und Imaginärteil.

$$\underline{\bar{x}} = \underline{\bar{x}}^{re} + j \underline{\bar{x}}^{im}$$

Weitere Möglichkeiten komplexe Gleichungssysteme zu lösen, sind wie bei reellen Gleichungssystem, nur das anstatt mit reellen Zahlen komplexen Zahlen gerechnet werden muss:

- Cramer Regel
- Inverse Matrix
- Gauß'sche Algorithmus

Aufgaben zu Abschnitt 6.8.3

Aufgabe 6.8.3.A

Das komplexe Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 + 2j & 5 + j6 \\ -3 + j4 & 7 + j8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 167 + j9 \\ 199 + j73 \end{bmatrix}$$

ist in ein reelles Gleichungssystem zu überführen.

Aufgabe 6.8.3.B

Bestimmen Sie Lösung des komplexen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 + 2j & 5 + j6 \\ -3 + j4 & 7 + j8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 167 + j9 \\ 199 + j73 \end{bmatrix}$$

Zur Reduzierung des Aufwandes ist die Lösung des reellen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & -6 \\ -3 & 7 & -4 & -8 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & -3 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1^{re} \\ x_2^{re} \\ x_1^{im} \\ x_2^{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 167 \\ 199 \\ 9 \\ 73 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{re} \\ x_2^{re} \\ x_1^{im} \\ x_2^{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ -12 \\ -13 \end{bmatrix}$$

schon berechnet

6.8.4. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze

Wiederholung Theorie:

gegeben: Netzwerk mit k-Knoten und z-Zweigen.

gesucht: z komplexe Ströme und z komplexe Spannungen

Aufstellen des Gleichungssystems:

- Spannung in jeden Zweig ersetzen

$$\underline{U}_i = \underline{Z}_i * \underline{I}_i$$

- (k-1) komplexe Knotengleichungen auswerten

- m = z -(k-1) komplexe Maschengleichungen auswerten

Beispiel: Netzwerk 6.8A

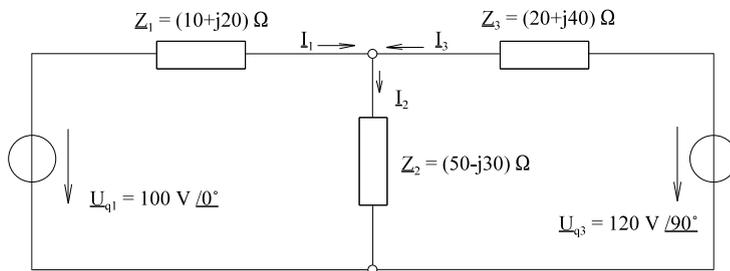


Bild EG684A

k = 2

z = 3m = 3-(2-1) = 2

=> 1 Knotengleichung, 2 Maschengleichungen

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

$$\underline{Z}_1 * \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 * \underline{I}_2 = \underline{U}_{q1}$$

$$\underline{Z}_3 * \underline{I}_3 + \underline{Z}_2 * \underline{I}_2 = \underline{U}_{q2}$$

1	-1	1
\underline{Z}_1	\underline{Z}_2	
	\underline{Z}_2	\underline{Z}_3

\underline{I}_1	=	0
\underline{I}_2		\underline{U}_{q1}
\underline{I}_3		\underline{U}_{q2}

1	-1	1
$(10+j20)\Omega$	$(50-j30)\Omega$	
	$(50-j30)\Omega$	$(20+j40)\Omega$

\underline{I}_1	=	0
\underline{I}_2		100 V
\underline{I}_3		j120 V

Direkte Lösung mit Hilfe des HP48:

$$\underline{I}_1 = 1.53 \text{ A} / -102.8^\circ$$

$$\underline{I}_2 = 1.31 \text{ A} / 47.4^\circ$$

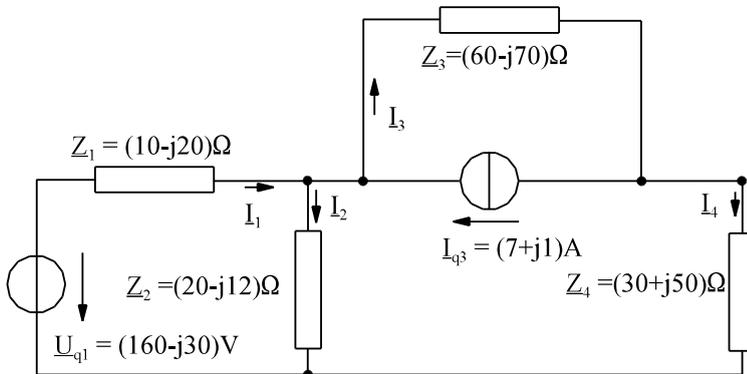
$$\underline{I}_3 = 2.75 \text{ A} / 63.4^\circ$$

Umformung auf ein reelles Gleichungssystem liefert nach Lösung das gleiche Ergebnis.

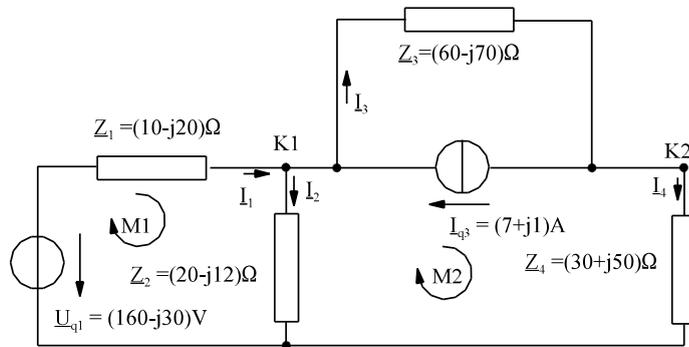
Aufgaben zu Abschnitt 6.8.4

Aufgabe 6.8.4.A

Stellen Sie für die komplexen Ströme des unteren Netzwerk das Gleichungssystem nach der Methode "Maschen- und Knotenanalyse (Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze)" auf und überführen Sie dieses in ein reelles Gleichungssystem.



Aufgabe 6.8.4.B



Für das unten dargestellte Netzwerk wurde das Gleichungssystem schon nach der Methode "Maschen- und Knotenanalyse (Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze)" aufgestellt und in ein reelles Gleichungssystem überführt:

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} M1 \\ M2 \\ K1 \\ K2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & & \\ & -Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ -1 & 1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ I_{q3} \\ -I_{q3} \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} (10 - j20) \Omega & (20 - j12) \Omega & & \\ & -(20 - j12) \Omega & (60 - j70) \Omega & (30 + j50) \Omega \\ -1 & 1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (160 - j30) \text{ V} \\ 0 \\ (7 + j1) \text{ A} \\ -(7 + j1) \text{ A} \end{bmatrix}$$

Ergebnis linkes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 10 \Omega & 20 \Omega & 0 & 0 & 20 \Omega & 12 \Omega & 0 & 0 \\ 0 & -20 \Omega & 60 \Omega & 30 \Omega & 0 & -12 \Omega & 70 \Omega & -50 \Omega \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 \Omega & -12 \Omega & 0 & 0 & 10 \Omega & 20 \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 12 \Omega & -70 \Omega & 50 \Omega & 0 & -20 \Omega & 60 \Omega & 30 \Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_1^{re} \\ I_2^{re} \\ I_3^{re} \\ I_4^{re} \\ I_1^{im} \\ I_2^{im} \\ I_3^{im} \\ I_4^{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \text{ V} \\ 0 \\ 7 \text{ A} \\ -7 \text{ A} \\ -30 \text{ V} \\ 0 \\ 1 \text{ A} \\ -1 \text{ A} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1^{re} \\ I_2^{re} \\ I_3^{re} \\ I_4^{re} \\ I_1^{im} \\ I_2^{im} \\ I_3^{im} \\ I_4^{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \text{ A} \\ 2 \text{ A} \\ -5 \text{ A} \\ 3 \text{ A} \\ 0 \\ 4 \text{ A} \\ 3 \text{ A} \end{bmatrix}$$

Zur Reduzierung des Aufwandes ist die Lösung des oberen Gleichungssystems schon oben mit angegeben. Berechnen Sie die komplexen Effektivwerte der Spannungen \underline{U}_1 bis \underline{U}_4 . Geben Sie den Zeitverlauf der Spannung $u_1(t)$ an.

6.8.5. Komplexes Maschenstrom-Verfahren

Wiederholung aus Kap. 3.3 (erstes Semester) und komplexe Erweiterung

Schema:

gegeben: komplexes Netzwerk mit z -Zweigen und k -Knoten

A] $m = z - k + 1$ komplexe Maschenströme eindeutig festlegen

B] komplexes Gleichungssystem $m \times m$ mit Maschenströmen $\underline{\underline{I}}'$ aufstellen:

$$\underline{\underline{Z}}' * \underline{\underline{I}}' = \underline{\underline{U}}_q'$$

C] **Hauptdiagonale:** Summe der komplexen Maschenwiderstände

D] **Nebendiagonale:** symmetrisch zur Hauptdiagonalen

Bei "i", "j" wird der komplexe Widerstand eingetragen, der von den Maschenströmen $\underline{\underline{I}}_i'$ und $\underline{\underline{I}}_j'$ durchflossen wird

+ => $\underline{\underline{I}}_i'$ und $\underline{\underline{I}}_j'$ in gleicher Richtung

- => $\underline{\underline{I}}_i'$ und $\underline{\underline{I}}_j'$ in verschiedenen Richtungen

E] Evtl. Stromquellen in Spannungsquellen umwandeln.

F] **Anregungsvektor:** Summe der komplexen Quellspannungen einer Masche eintragen
 $+\underline{\underline{U}}_{qi}$ wenn $\underline{\underline{U}}_{qi}$ in Maschenrichtung Strom treibt
 $-\underline{\underline{U}}_{qi}$ wenn $\underline{\underline{U}}_{qi}$ gegen Maschenrichtung Strom treibt

G1] Komplexes Gleichungssystem lösen.

G2] Umformen auf reelles Gleichungssystem. Nach Lösung wieder komplexe Variablen zusammenfügen.

H] Restliche Ströme und Spannungen berechnen

Beispiel:

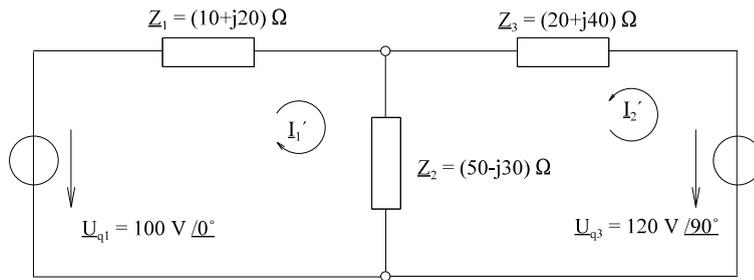


Bild EG685A

$z = 3 \quad k = 2 \quad m = 3 - (2 \cdot 1) = 2 \quad \Rightarrow \quad I_1', I_2'$

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 60 - j10 & 50 - j30 \\ 50 - j30 & 70 + j10 \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ j120 \end{bmatrix} \text{ V}$$

G1] Direkte Lösung mit HP48 liefert:

$I_1' = 1.53 \text{ A} / -102.8^\circ \quad I_2' = 2.75 \text{ A} / 63.4^\circ$

G2] Umformen in ein reelles Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 60 & 50 & 10 & 30 \\ 50 & 70 & 30 & -10 \\ -10 & -30 & 60 & 50 \\ -30 & 10 & 50 & 70 \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} I_1^{re} \\ I_2^{re} \\ I_1^{im} \\ I_2^{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 120 \end{bmatrix} \text{ V}$$

Ergebnis: $I_1^{re} = -0.339 \text{ A} \quad I_2^{re} = 1.23 \text{ A} \quad I_1^{im} = -1.49 \text{ A} \quad I_2^{im} = 2.46 \text{ A}$

$I_1' = -0.339 \text{ A} - j1.49 \text{ A} = 1.53 \text{ A} / -102.8^\circ$

$I_2' = 1.23 \text{ A} + j2.46 \text{ A} = 2.75 \text{ A} / 63.4^\circ$

$I_1 = I_1'$

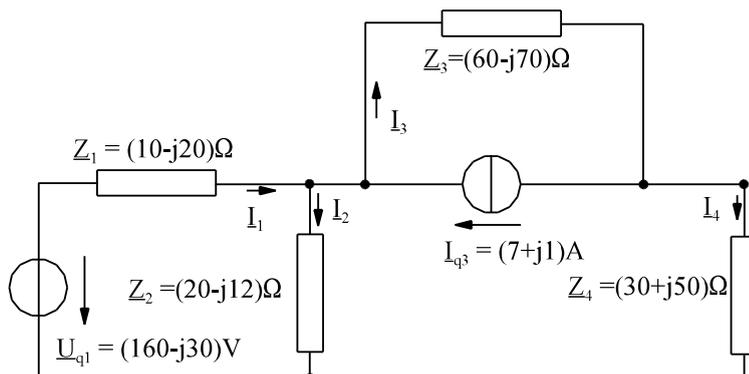
$I_2 = I_1' + I_2' = 0.89 \text{ A} + j0.97 \text{ A}$

$I_3 = I_2'$

fehlt noch: Spannungen über komplexe Widerstände berechnen.

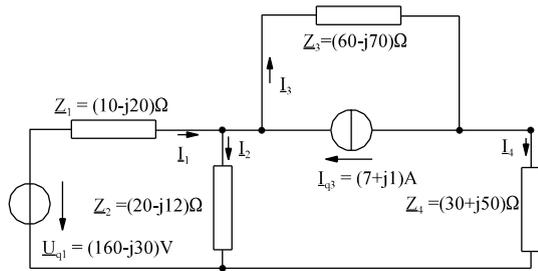
Aufgaben zu Abschnitt 6.8.5

Aufgabe 6.8.5.A

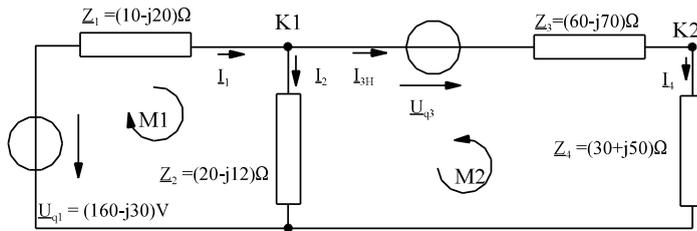


Stellen Sie für das dargestellte Netzwerk das Gleichungssystem nach der Methode "Maschenstromverfahren" auf und überführen Sie dieses in ein reelles Gleichungssystem.

Aufgabe 6.8.5.B



Für das dargestellte Netzwerk wurde das Gleichungssystem schon nach der Methode "Maschenstromverfahren" aufgestellt und in ein reelles Gleichungssystem überführt:



$z = 4$
 $k = 3$
 $m = z - (k - 1) = 4 - (3 - 1) = 2$

$\underline{U}_{q3} = \underline{Z}_3 * \underline{I}_{q3} = (60 - j70)\Omega * (7 + j1) \text{ A} = (490 - j430)\text{V}$

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{q1} \\ \underline{U}_{q3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (30 - j32) \Omega & (20 - j12) \Omega \\ (20 - j12) \Omega & (110 - j32) \Omega \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (160 - j30) \text{ V} \\ (490 - j430) \text{ V} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 \Omega & 20 \Omega & 32 \Omega & 12 \Omega \\ 20 \Omega & 110 \Omega & 12 \Omega & 32 \Omega \\ -32 \Omega & -12 \Omega & 30 \Omega & 20 \Omega \\ -12 \Omega & -32 \Omega & 20 \Omega & 110 \Omega \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{I}_{1re}' \\ \underline{I}_{2re}' \\ \underline{I}_{1im}' \\ \underline{I}_{2im}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \text{ A} \\ 490 \text{ A} \\ -30 \text{ A} \\ -430 \text{ A} \end{bmatrix}$$

Ergebnis linkes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{1re}' \\ \underline{I}_{2re}' \\ \underline{I}_{1im}' \\ \underline{I}_{2im}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ A} \\ 5 \text{ A} \\ 3 \text{ A} \\ -3 \text{ A} \end{bmatrix}$$

Zur Reduzierung des Aufwandes ist die Lösung des oberen Gleichungssystems schon oben mit angegeben. Berechnen Sie die komplexen Effektivwerte der Spannungen \underline{U}_1 bis \underline{U}_4 .

6.8.6. Komplexes Maschenstrom Verfahren für Rechner

Ableitung siehe 1. Semester Kap. 3.3.4, hier nur um komplex erweitert.

Schema:

gegeben: Komplexes Netzwerk mit z-Zweigen und k-Knoten

A] In einer z*z-Matrix die komplexen Widerstände der Zweige in die Diagonale eintragen, z.B. für n = 3

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$$

B] $m = z - (k - 1)$ komplexe Maschenströme eindeutig festlegen

C] Zweigrichtungen so festlegen, dass die Spannungsquellen der Zweige zu einem positiven Zweigstrom im Zweig beitragen.

D] Zweigströme als Funktion der Maschenströme berechnen und in die Matrix-Schreibweise umformen

$$\underline{\bar{I}} = \underline{\bar{C}} * \underline{\bar{I}}'$$

$$\underline{\bar{I}} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \dots \\ \dots \\ \underline{I}_z \end{pmatrix} \text{ - komplexe Zweigströme}$$

$$\underline{\bar{I}}' = \begin{pmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \\ \dots \\ \dots \\ \underline{I}'_m \end{pmatrix} \text{ - komplexe Maschenströme}$$

$\underline{\bar{C}}$ - Zweig-Maschen-Inzidenz-Matrix $\dim(\underline{\bar{C}}) = (z, m)$

E] Vektor der Zweigspannungen eintragen:

$$\underline{\bar{U}}_q = \begin{pmatrix} \underline{U}_{q1} \\ \underline{U}_{q2} \\ \dots \\ \dots \\ \underline{U}_{q\varphi} \end{pmatrix}$$

F] Lösung:

Damit sind die notwendigen Matrizen und Vektoren

$$\underline{\bar{Z}} \quad \underline{\bar{C}} \quad \underline{\bar{U}}_q$$

bestimmt. Mit Hilfe der Matrizenrechnung können berechnet werden:

$$\underline{\bar{I}}' \text{ - Maschenströme}$$

$$\underline{\bar{I}} \text{ - Zweigströme}$$

$$\underline{\bar{U}} \text{ - Zweigspannungen an den passiven Elementen } \underline{Z}$$

Ableitung 1. Semester Kap. 3.3.4, hier nur Angabe und Erweiterung auf komplex:

$$\underline{\bar{I}}' = [\underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{Z}} * \underline{\bar{C}}]^{-1} * \underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{U}}_q$$

$$\underline{\bar{I}} = \underline{\bar{C}} * \underline{\bar{I}}' = \underline{\bar{C}} [\underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{Z}} * \underline{\bar{C}}]^{-1} * \underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{U}}_q$$

$$\underline{\bar{U}} = \underline{\bar{Z}} * \underline{\bar{I}} = \underline{\bar{Z}} * \underline{\bar{C}} [\underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{Z}} * \underline{\bar{C}}]^{-1} * \underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{U}}_q$$

Hinweis 1:

Das im letzten Abschnitt aufgestellte Gleichungssystem

$$\underline{\bar{I}}' = \underline{\bar{Z}}^{-1} * \underline{\bar{U}}_q$$

ist auch hier vorhanden mit

$$\underline{\bar{Z}}' = \underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{Z}} * \underline{\bar{C}} \quad \underline{\bar{U}}_q' = \underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{U}}_q$$

Hinweis 2:

Für Rechner ohne komplexe Matrizenrechnung muss eine Aufspaltung der Gleichungssysteme nach Kap. 6.8.3 vorgenommen werden, z.B.:

$$\begin{pmatrix} \underline{\bar{I}}'_{re} \\ \underline{\bar{I}}'_{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{Z}}_{re} * \underline{\bar{C}} & -\underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{Z}}_{im} * \underline{\bar{C}} \\ \underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{Z}}_{im} * \underline{\bar{C}} & \underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{Z}}_{re} * \underline{\bar{C}} \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} \underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{U}}_q^{re} \\ \underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{U}}_q^{im} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

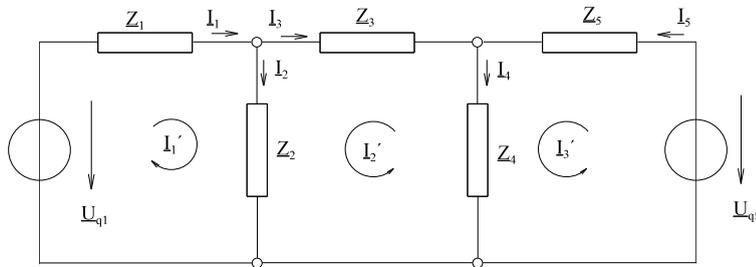


Bild EG686A

$n = 5$ $k = 3$ $m = 5 - (3 - 1) = 3 \Rightarrow I_1', I_2', I_3'$

$I_1 = I_1'$
 $I_2 = I_1' + I_2'$
 $I_3 = -I_2'$
 $I_4 = -I_2' + I_3'$
 $I_5 = I_3'$

$$\underline{\bar{I}} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1' \\ I_2' \\ I_3' \end{pmatrix} = \underline{\bar{C}} * \underline{\bar{I}}'$$

$$\underline{\bar{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\bar{Z}} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 & & & & \\ & \underline{Z}_2 & & & \\ & & \underline{Z}_3 & & \\ & & & \underline{Z}_4 & \\ & & & & \underline{Z}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+j20 & & & & \\ & 5+j10 & & & \\ & & 70+j80 & & \\ & & & 2+j15 & \\ & & & & 8+j12 \end{pmatrix} \Omega$$

$$\underline{\bar{U}}_q = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 150/30^\circ \end{pmatrix} \text{ V}$$

Eingabe, $\underline{\bar{C}}$, $\underline{\bar{Z}}$, $\underline{\bar{U}}_q$ in HP48, danach Berechnung mit Hilfe der Formel

$$\underline{\bar{I}} = \underline{\bar{C}} * \underline{\bar{I}}' = \underline{\bar{C}} [\underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{Z}} * \underline{\bar{C}}]^{-1} * \underline{\bar{C}}_T * \underline{\bar{U}}_q$$

$I_1 = 2.95 \text{ A} / -66.5^\circ$ $I_2 = 3.07 \text{ A} / -57.5^\circ$ $I_3 = 0.488 \text{ A} / -165.6^\circ$
 $I_4 = 5.03 \text{ A} / -41.5^\circ$ $I_5 = 5.31 \text{ A} / -37.1^\circ$

Kommentar: schnellste Methode mit HP48

6.8.7. Dreieck-Stern und Stern-Dreieck-Umwandlung

Die beiden Umwandlungsformen wurden im 1. Semester, Kap. 3.4.3, für ohmsche Widerstände hergeleitet. Tauscht man R gegen \underline{Z} aus ergibt sich:

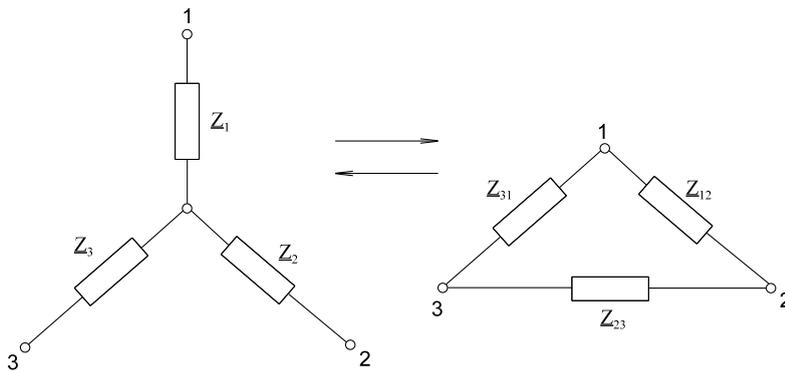


Bild EG687A

$$\begin{pmatrix} \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \begin{pmatrix} \underline{Z}_{12} * \underline{Z}_{31} \\ \underline{Z}_{12} * \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{23} * \underline{Z}_{31} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} \\ \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1} \\ \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3 * \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \end{pmatrix}$$

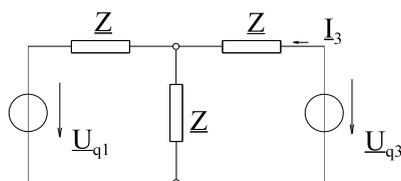
Der Stern-Widerstand ergibt sich aus der Multiplikation beider, der Klemmen anliegender Dreieck-Widerstände, dividiert durch die Summe der Dreieck-Widerstände.

Die Dreieck-Widerstände ergeben aus der Summe der beiden Klemmen anliegender Stern-Widerstände plus dessen Produkt dividiert durch den gegenüberliegenden Stern-Widerstand.

Für drei gleiche Widerstände ergibt sich

$$\underline{Z}_\Delta = \frac{1}{3} \underline{Z}_\text{Stern}$$

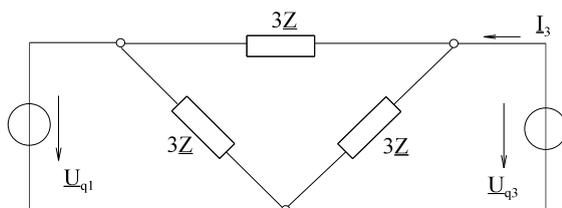
Beispiel:



Der Strom \underline{I}_3 ist zu bestimmen.

Bild EG687B

Umformung



Aus dem oberen Bild ergibt sich direkt:

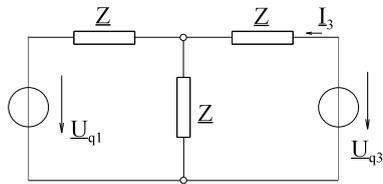
Bild EG687C

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{q3}}{3\underline{Z}} + \frac{\underline{U}_{q3} - \underline{U}_{q1}}{3\underline{Z}} = \frac{2\underline{U}_{q3} - \underline{U}_{q1}}{3\underline{Z}}$$

Aufgaben zu Abschnitt 6.8.7

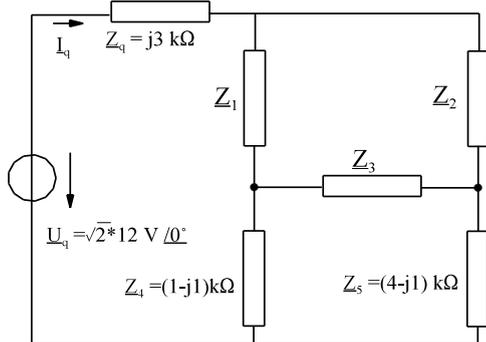
Aufgabe 6.8.7.A

Für das unten dargestellte Netzwerk ist nur der komplexe Strom \underline{I}_3 zu berechnen. **Hinweis:** Die Tatsache dreier gleicher Widerstände \underline{Z} erspart Berechnungsaufwand.



$$\begin{aligned}\underline{Z} &= (20 + j10)\Omega \\ \underline{U}_{q1} &= 100 \text{ V} + j0 \\ \underline{U}_{q3} &= (170 + j60) \text{ V}\end{aligned}$$

Aufgabe 6.8.7.B

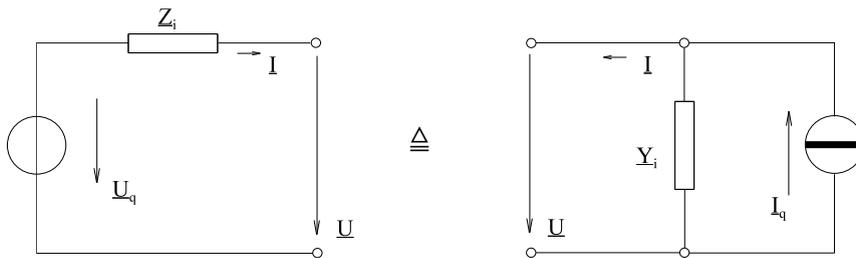


Berechnen Sie beim dargestellten Netzwerk nur den Strom \underline{I}_q ; **Hinweis:** Die Beachtung dreier gleicher Widerstände erspart Aufwand.

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = (6 + j3) \text{ k}\Omega$$

6.8.8. Quellen-Umwandlung

Nach Kap. 2.7.3 (1. Semester) konnte eine Spannungsquelle in eine äquivalente Stromquelle mit gleichen Verhalten an den Klemmen umgewandelt werden und umgekehrt. Erweiterung der reellen Größen auf komplexe ergibt:



$$\underline{I}_q = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i}$$

$$\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i}$$

Bild EG688A

Beispiel:

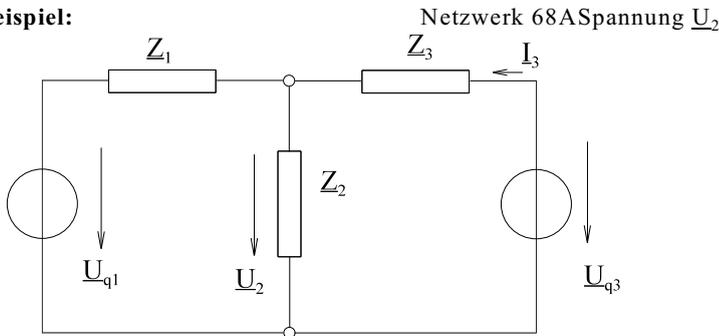


Bild EG688B

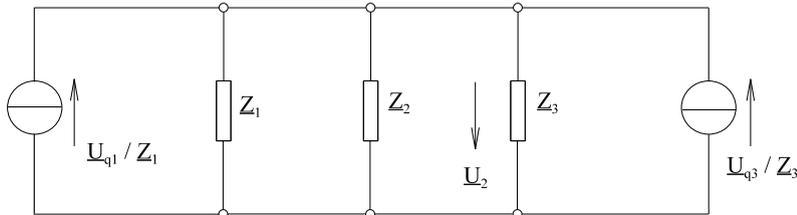
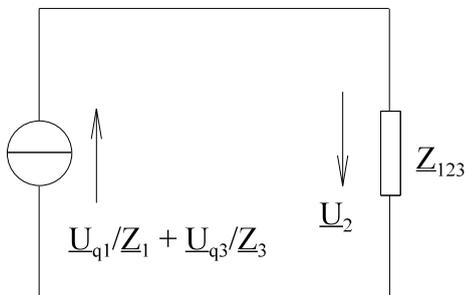


Bild EG688C



$$\underline{Z}_{123} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{123} \left(\frac{\underline{U}_{q1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{q3}}{\underline{Z}_3} \right)$$

Bild EG688D

Die folgenden Variablen werden in HP48 eingegeben und unter Namen abgespeichert:

$$\underline{Z}_1 = (10 + j20)\Omega$$

$$\underline{Z}_2 = (50 - j30)\Omega$$

$$\underline{Z}_3 = (20 + j40)\Omega$$

$$\underline{U}_{q1} = 100 \text{ V}$$

$$\underline{U}_{q3} = j120 \text{ V}$$

\underline{Z}_{123} wird berechnet und auch unter Namen abgespeichert:

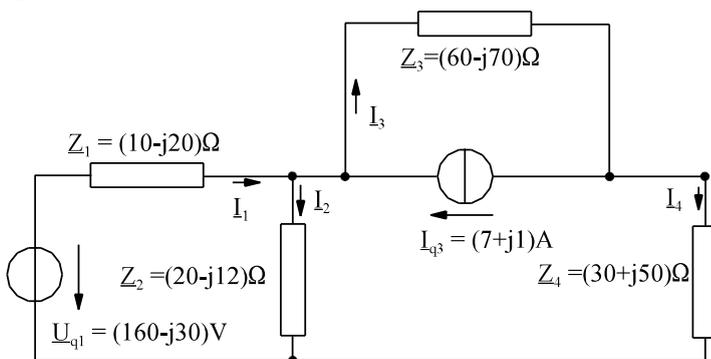
$$\underline{Z}_{123} = 14.72 \Omega / 48.86^\circ$$

Die Spannung \underline{U}_2 wird danach mit obiger Formel berechnet:

$$\underline{U}_2 = 76.7 \text{ V} / 16.39^\circ$$

Aufgabe zu Abschnitt 6.8.8

Aufgabe 6.8.8.A



Der komplexe Strom \underline{I}_4 des dargestellten Netzwerks ist mit Hilfe von Quellenwandlungen zu bestimmen.

6.8.9. Überlagerungsprinzip

Wiederholung Überlagerungsprinzip (Kap.3.5, 1. Semester) und auf komplexe Größen erweitert:

gegeben: Lineares Netz mit $\underline{U}_i = \underline{Z}_i * \underline{I}_i$ und n-Spannungsquellen

Schema:

- A] Die Auswirkungen von n Quellen einzeln untersuchen. Dazu:
 - alle anderen idealen Spannungsquellen kurzschließen
 - alle anderen idealen Stromquellen öffnen
- B] Alle Anteile in den Zweigen von Strom und Spannung n mal überlagern (addieren)

Beispiel:

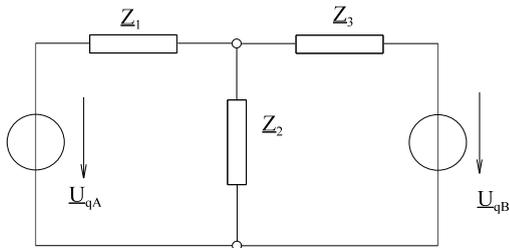
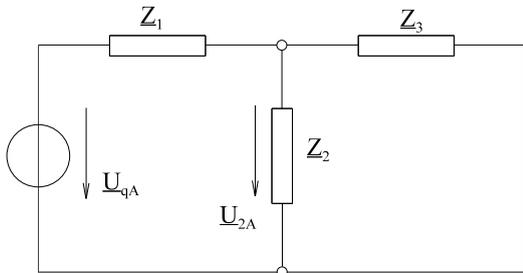


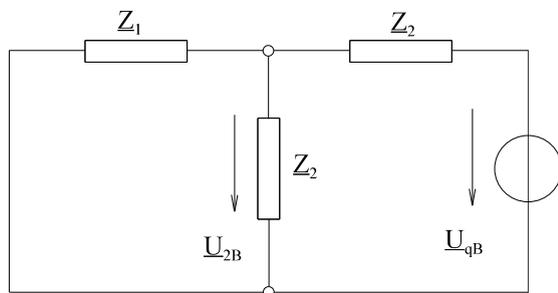
Bild EG689A



$$\underline{U}_{2A} = \underline{U}_{qA} * \frac{\frac{\underline{Z}_2 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}}$$

$$\underline{U}_{2A} = \frac{\underline{Z}_2 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 * \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 * \underline{Z}_1} * \underline{U}_{qA}$$

Bild EG689B



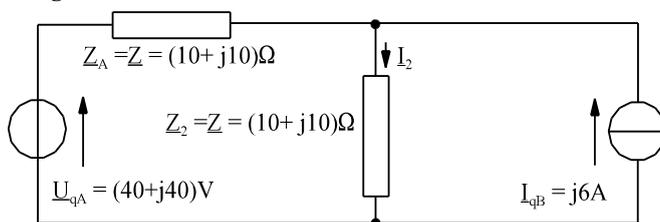
$$\underline{U}_{2B} = \underline{U}_{qB} \frac{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 * \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 * \underline{Z}_1}$$

Bild EG689C

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{2A} + \underline{U}_{2B} = \frac{\underline{U}_{qA} * \underline{Z}_2 * \underline{Z}_3 + \underline{U}_{qB} * \underline{Z}_1 * \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 * \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 * \underline{Z}_1}$$

Aufgabe zu Abschnitt 6.8.9

Aufgabe 6.8.9.A



Der komplexe Strom \underline{I}_2 des dargestellten Netzwerks ist mit Hilfe der Methode "Überlagerung" zu bestimmen

6.8.10. Ersatzquellen

Wenn nur Strom und Spannung an einem komplexen Widerstand im Netz von Interesse sind, kann das Restnetzwerk zu einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand umgeformt werden.

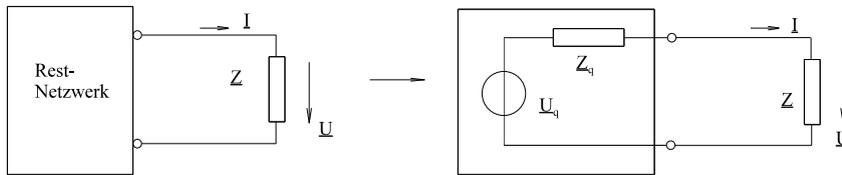


Bild EG6810A

Nach Bild EG6810A können Strom und Spannung am Widerstand \underline{Z} bestimmt werden:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_q + \underline{Z}} \quad \underline{U} = \underline{U}_q \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_q}$$

Die Elemente \underline{U}_q und \underline{Z}_q sind noch zu bestimmen. Aus Kap. 3.6 (1. Semester) mit Erweiterung auf komplexe Rechnung, ergibt sich:

Es müssen von den drei Werten

\underline{I}_q - Kurzschlussstrom an den Klemmen von \underline{Z}

\underline{U}_q - Leerlaufspannung an den Klemmen von \underline{Z} (\underline{Z} abklemmen)

\underline{Z}_q - Innenwiderstand an den Klemmen von \underline{Z}

zwei bestimmt werden. Der dritte Wert ist mit Hilfe der Formel

$$\underline{U}_q = \underline{Z}_q * \underline{I}_q$$

zu berechnen. Der komplexe Innenwiderstand wird bestimmt, indem man in die Klemmen des Restnetzwerkes hinein sieht. Ideale Spannungsquellen werden dabei kurzgeschlossen und ideale Stromquellen geöffnet.

Beispiel: Strom \underline{I}_2

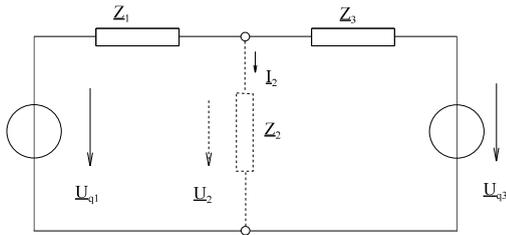


Bild EG6810B

A] Kurzschlussstrom an den Klemmen von \underline{Z}_2 :

$$\underline{I}_q = \frac{\underline{U}_{q1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{q3}}{\underline{Z}_3}$$

B] Innenwiderstand an den Klemmen von \underline{Z}_2 :

$$\underline{Z}_q = \underline{Z}_1 \parallel \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}$$

C] Umrechnung:

$$\underline{U}_q = \underline{I}_q * \underline{Z}_q = \left(\frac{\underline{U}_{q1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{q3}}{\underline{Z}_3} \right) * \frac{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{q1} * \underline{Z}_3 + \underline{U}_{q3} * \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}$$

D] Formel zur Stromberechnung

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_q + \underline{Z}_2} = \frac{\frac{\underline{U}_{q1} * \underline{Z}_3 + \underline{U}_{q3} * \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}}{\frac{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_{q1} * \underline{Z}_3 + \underline{U}_{q3} * \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 * \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 * \underline{Z}_3}$$

E] Die Größen

$$\underline{U}_{q1}, \underline{U}_{q2}, \underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$$

werden mit Namen im Taschenrechner gespeichert. Die Berechnung mit Hilfe der Formel unter D ergibt:

$$\underline{I}_2 = 1.32 \text{ A} / 47.35^\circ$$

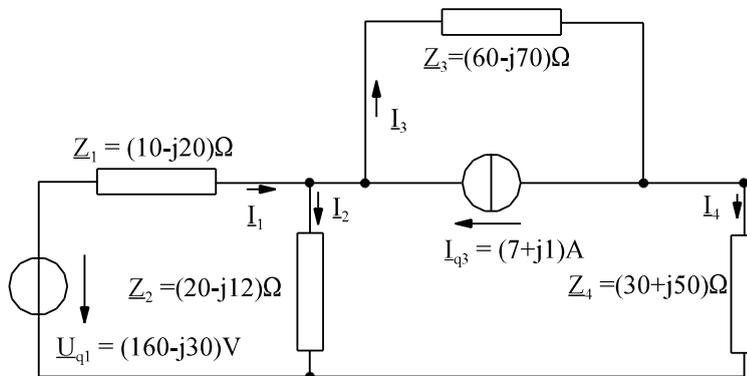
Alternative Berechnung:

\underline{U}_{q1}	$\underline{U}_{q2}, \underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$	→	im Taschenrechner unter Namen
\underline{Z}_q	nach B	→	im Taschenrechner unter Namen
\underline{U}_q	nach C	→	im Taschenrechner unter Namen

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_q + \underline{Z}_c} \quad \text{berechnen unter Aufruf der Taschenrechner Namen}$$

Aufgaben zu Abschnitt 6.8.10

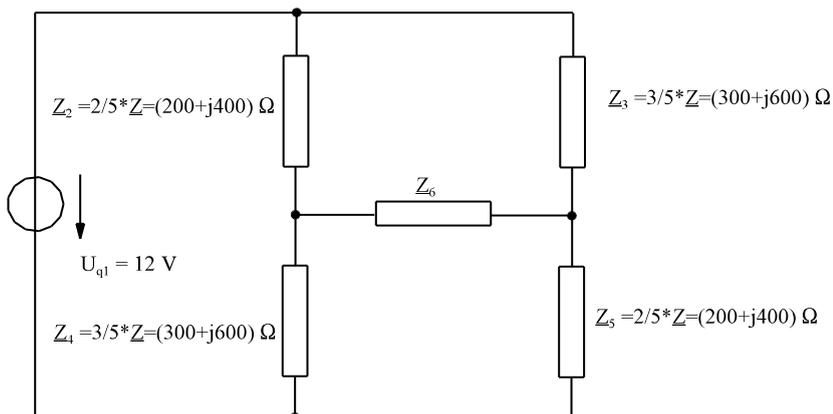
Aufgabe 6.8.10.A



Der komplexe Strom I_4 des dargestellten Netzwerks ist mit Hilfe der Methode "Ersatzquelle" zu bestimmen.

Aufgabe 6.8.10.B

Im dargestellten Netzwerk ist der Widerstand Z_6 zu bestimmen, damit die Wirkleistung an Z_6 maximal wird. Bestimmen Sie die maximale Wirkleistung.



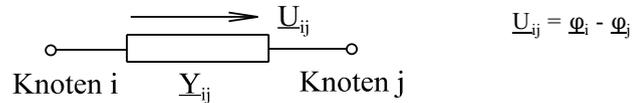
$$Z = (500 + j1000) \Omega$$

6.8.11. Komplexes Knotenpunkt-Potential-Verfahren

Wiederholung aus Kap.3.7 (1. Semester) und komplexe Erweiterung.

Prinzip: Jedem Knoten wird ein komplexes Potential $\underline{\varphi}$ zugeordnet.

Die Spannung an dem Zweig zwischen den Knoten i und j ergibt sich aus der Differenz der Potentiale



gegeben: Netzwerk mit k-Knoten

Schema:

- A] Einem Knoten, dem Knoten "0", wird willkürlich das Potential $\underline{\varphi}_0 = 0$ zugeordnet.
- B] Die anderen Knoten bekommen das Potential $\underline{\varphi}_1$ bis $\underline{\varphi}_{k-1}$
- C] Spannungsquellen in Stromquellen umwandeln.
- D] Komplexe Widerstände in komplexe Leitwerte umwandeln.
- E] Komplexes Gleichungssystem für die Potential $\underline{\varphi}_1$ bis $\underline{\varphi}_{k-1}$ aufstellen.

$$\underline{\bar{Y}}'_q * \underline{\bar{\varphi}} = \underline{\bar{I}}'_q$$

\underline{Y}_{11}	\underline{Y}_{12}	\underline{Y}_{13}	*	$\underline{\varphi}_1$	=	\underline{I}_{q1}'	für k-1 = 3
\underline{Y}_{21}	\underline{Y}_{22}	\underline{Y}_{23}		$\underline{\varphi}_2$		\underline{I}_{q2}'	
\underline{Y}_{31}	\underline{Y}_{32}	\underline{Y}_{33}		$\underline{\varphi}_3$		\underline{I}_{q3}'	

- F] **Hauptdiagonale:** Alle vom Knoten abgehenden Leitwerte positiv aufsummieren.
- G] **Koppelemente:** Die Leitwerte \underline{Y}_{ij} zwischen den Knoten i und j an der Stelle $\underline{Y}(i,j)$ und $\underline{Y}(j,i)$ negativ eintragen, die Matrix $\underline{\bar{Y}}'$ ist symmetrisch.

H] **Vektor $\underline{\bar{I}}'_q$, Element \underline{I}_{qj}'**

Alle den Knoten j verbundenen Stromquellen vorzeichenrichtig aufsummieren

- + bei reinfließenden Strom
- bei rausfließenden Strom

I] **Komplexes Gleichungssystem lösen:**

- I1] in reelles Gleichungssystem überführen, lösen, komplexen Lösungsvektor wieder zum komplexen Lösungsvektor zusammensetzen.
- I2] Komplexes Gleichungssystem direkt lösen.

K] Spannungen berechnen $\underline{U}_{ij} = \underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_j$

L] Ströme berechnen $\underline{I}_{ij} = \underline{U}_{ij} * \underline{Y}_{ij}$

Beispiel:

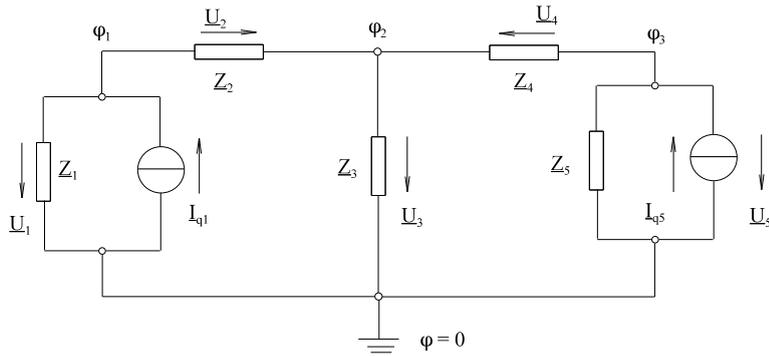


Bild EG6811A

$I_{q1} = 10 \text{ A } /0^\circ$	$Z_1 = (10 + j10) \Omega$	\Rightarrow	$Y_1 = (0.05 - j0.05)S$
$I_{q5} = 5 \text{ A } /-60^\circ$	$Z_2 = (2 + j4) \Omega$	\Rightarrow	$Y_2 = (0.1 - j0.2)S$
	$Z_3 = (60 + j80) \Omega$	\Rightarrow	$Y_3 = (0.006 - j0.008)S$
	$Z_4 = (3 - j6) \Omega$	\Rightarrow	$Y_4 = (0.06667 + j0.1333)S$
	$Z_5 = (10 + j17.32) \Omega$	\Rightarrow	$Y_5 = (0.025 - j0.0433)S$

$k = 4 \Rightarrow$ Variable $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

	1	2	3					
1	$Y_1 + Y_2$	$-Y_2$	0	φ_1	=	I_{q1}		
2	$-Y_2$	$Y_2 + Y_3 + Y_4$	$-Y_4$				φ_2	0
3	0	$-Y_4$	$Y_4 + Y_5$				φ_3	I_{q5}
	0.15 - j0.25	-0.1 + j0.2	0	φ_1	=	$10/0^\circ$		
	-0.1 + j0.2	0.17267 - j0.07467	-0.06667 - j0.1333	φ_2	=	0		
	0	-0.06667 - j0.1333	0.09167 + j0.09003	φ_3	=	$5/-60^\circ$		

Direkte Lösung mit HP48 ergibt:

$\varphi_1 = 109.7 \text{ V} /32.28^\circ$ $\varphi_2 = 105.1 \text{ V} /25.63^\circ$ $\varphi_3 = 90.77 \text{ V} /31.84^\circ$

Die Spannungen ergeben sich aus den Potentialdifferenzen

$U_1 = \varphi_1 = 109.7 \text{ V} /32.28^\circ$
 $U_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = 13.29 \text{ V} /98.54^\circ$
 $U_3 = \varphi_2 = 105.1 \text{ V} /25.63^\circ$
 $U_4 = \varphi_3 - \varphi_2 = 17.82 \text{ V} /172.2^\circ$
 $U_5 = \varphi_3 = 90.77 \text{ V} /31.84^\circ$

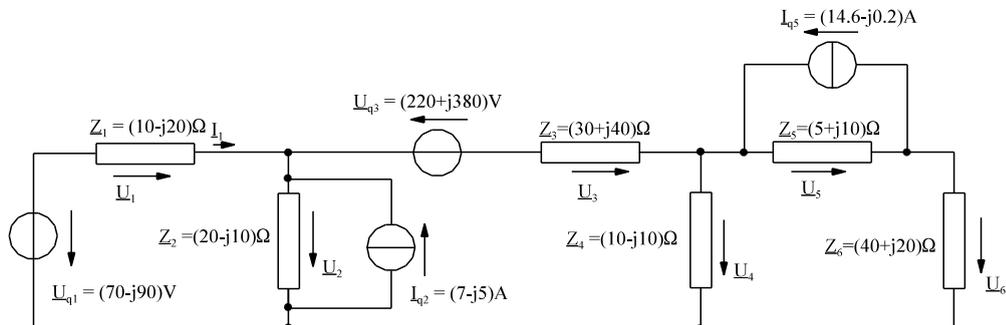
Falls kein Rechner mit komplexer Matrizenrechnung zur Verfügung steht, muss das Gleichungssystem nach Kap. 6.8.3 aufgespalten werden:

0.15	-0.1	0	0.25	-0.2	0	S^*	φ_1^{re}	=	10	A
-0.1	0.17267	-0.06667	-0.2	0.07467	0.1333		φ_2^{re}	=	0	
0	-0.06667	0.09176	0	0.1333	-0.09003		φ_3^{re}	=	2.5	
-0.25	0.2	0	0.15	-0.1	0		φ_1^{im}	=	0	
0.2	-0.07467	-0.1333	-0.1	0.17267	-0.06667		φ_2^{im}	=	0	
0	-0.1333	0.09003	0	-0.06667	0.09176		φ_3^{im}	=	-4.330	

Aufgaben zu Abschnitt 6.8.11

Aufgabe 6.8.11.A

Stellen Sie für die komplexen Potentiale des unteren Netzwerk das Gleichungssystem nach der Methode "Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren" auf und überführen Sie dieses in ein reelles Gleichungssystem.



Aufgabe 6.8.11.B

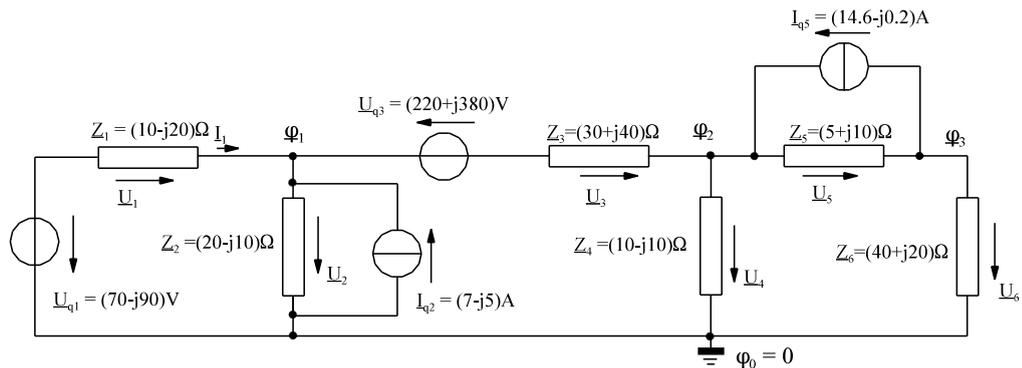
Bei dem dargestellten Netzwerk sind die Potentiale der Knoten schon nach der Methode "Knotenpunkt-Potenzial-Verfahren" berechnet.

$$\underline{\varphi}_1 = (0 - j100)\text{V}$$

$$\underline{\varphi}_2 = (120 - j20)\text{V}$$

$$\underline{\varphi}_3 = (20 - j140)\text{V}$$

Bestimmen Sie die komplexen Ströme I_1 bis I_6 .



6.8.12. Komplexes Knotenpunkt-Potential-Verfahren für Rechner

Ableitung siehe Kap.3.7.4 (1. Semester), hier nur um komplex erweitert.

gegeben: Netzwerk mit k-Knoten und z-Zweigen

Schema:

- A] Einem Knoten, dem Knoten "0", wird willkürlich das komplexe Potential $\underline{\varphi}_0 = 0$ zugeordnet.
- B] Die anderen Knoten bekommen das komplexe Potential $\underline{\varphi}_1$ bis $\underline{\varphi}_{k-1}$.
- C] Netzwerk umwandeln, dass nur komplexe Stromquellen und komplexe Leitwerte vorhanden sind.
- D] Den Spannungen in den Zweigen eine Richtung zuordnen. Die Zweige mit Quellen bekommen die Zweigrichtung entgegengesetzt zur Quelle. (Quellstrom muss positiven Anteil am Zweigspannung bewirken.)
- E] Spannungen an den Leitwerten durch Potentiale ausdrücken.

$$\underline{U}_{ij} = \underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_j$$

und in Matrixform umschreiben

$$\underline{U} = \underline{K}^T * \underline{\varphi}$$

mit
$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \dots \\ \underline{U}_z \end{pmatrix}$$

$$\underline{\varphi} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \dots \\ \underline{\varphi}_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\dim(\underline{K}^T) = (z, k - 1)$$

- F] Quellenvektor $\underline{\bar{I}}_q$ aufstellen: Die komplexen Stromquellen in den Zweigen in einen Vektor.

$$\underline{\bar{I}}_q = \begin{pmatrix} +\underline{I}_{q1} \\ +\underline{I}_{q2} \\ \dots \\ \dots \\ +\underline{I}_{qz} \end{pmatrix}$$

- G] Leitwertmatrix $\underline{\bar{Y}}$ aufstellen. Die Zweigleitwerte werden in der Diagonalen eintragen

$$\dim(\underline{\bar{Y}}) = (z, z)$$

$$\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i}$$

$$\underline{\bar{Y}} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

$$\underline{\bar{Y}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \underline{Y}_1 & & & & \\ \hline & \underline{Y}_2 & & & \\ \hline & & \dots & & \\ \hline & & & \dots & \\ \hline & & & & \underline{Y}_z \\ \hline \end{array}$$

- H] **Lösen:**

Damit sind die notwendigen Matrizen und Vektoren

$$\underline{\bar{Y}}, \underline{K} \text{ und } \underline{\bar{I}}_q$$

bestimmt. Mit Hilfe der Matrizenrechnung können berechnet werden:

$\underline{\bar{\varphi}}$ - Knotenpunktpotential

$\underline{\bar{U}}$ - Zweigspannungen

$\underline{\bar{I}}$ - Zweigströme

Ableitung Kap. 3.7.4 (1. Semester) hier nur Angabe und Erweiterung auf komplexe Größen

$\underline{\varphi}' = [\bar{K} * \bar{Y} * \bar{K}_T]^{-1} * \bar{K} * \bar{I}_q$
$\underline{U} = \bar{K}_T * \underline{\varphi} = \bar{K}_T [\bar{K} * \bar{Y} * \bar{K}_T]^{-1} * \bar{K} * \bar{I}_q$
$\bar{I} = \bar{Y} * \underline{U} = \bar{Y} * \bar{K}_T [\bar{K} * \bar{Y} * \bar{K}_T]^{-1} * \bar{K} * \bar{I}_q$

Anmerkung 1: Das im letzten Kapitel aufgestellte Gleichungssystem ist auch hier vorhanden mit:

$$\underline{\bar{Y}}' = \bar{K} * \bar{Y} * \bar{K}_T \quad \underline{\bar{I}}_q' = \bar{K} * \bar{I}_q \quad \underline{\bar{Y}}' * \underline{\varphi} = \underline{\bar{I}}_q'$$

Anmerkung 2: Obere Größen sind für das umgeformte Netzwerk berechnet. Für evtl. vorhandene Spannungsquellen muss mit den Ergebnissen eines Zweigs eine Umformung vorgenommen werden.

Anmerkung 3: Für Rechner ohne komplexe Matrizenrechnung muss eine Aufspaltung des Gleichungssystems nach Kap. 6.8.3. vorgenommen werden, z.B.:

$$\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_{re} \\ \underline{\varphi}_{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{K} * \bar{Y}_{re} * \bar{K}_T & -\bar{K} * \bar{Y}_{im} * \bar{K}_T \\ \bar{K} * \bar{Y}_{im} * \bar{K}_T & \bar{K} * \bar{Y}_{re} * \bar{K}_T \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} \bar{K} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{K} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \bar{I}_q^{re} \\ \bar{I}_q^{im} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\varphi}_{re} \\ \underline{\varphi}_{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{K} * \bar{Y}_{re} * \bar{K}_T & -\bar{K} * \bar{Y}_{im} * \bar{K}_T \\ \bar{K} * \bar{Y}_{im} * \bar{K}_T & \bar{K} * \bar{Y}_{re} * \bar{K}_T \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \bar{K} * \bar{I}_q^{re} \\ \bar{K} * \bar{I}_q^{im} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

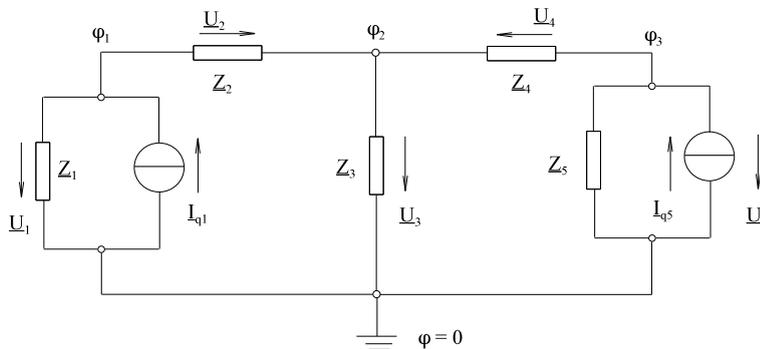


Bild EG6811A

- | | |
|-----------------------------------|---|
| $I_{q1} = 10 \text{ A } /0^\circ$ | $I_{q5} = 5 \text{ A } /-60^\circ$ |
| $Z_1 = (10 + j10) \Omega$ | $\Rightarrow Y_1 = (0.05 - j0.05) \text{ S}$ |
| $Z_2 = (2 + j4) \Omega$ | $\Rightarrow Y_2 = (0.1 - j0.2) \text{ S}$ |
| $Z_3 = (60 + j80) \Omega$ | $\Rightarrow Y_3 = (0.006 - j0.008) \text{ S}$ |
| $Z_4 = (3 - j6) \Omega$ | $\Rightarrow Y_4 = (0.06667 - j0.1333) \text{ S}$ |
| $Z_5 = (10 + j17.32) \Omega$ | $\Rightarrow Y_5 = (0.025 - j0.0433) \text{ S}$ |
| $k - 1 = 3$ | $z = 5$ |

$\underline{\bar{Y}} =$	0.05 - j0.05				S
		0.1 - j0.2			
			0.006 - j0.008		
				0.06667 + j0.1333	
				0.025 - j0.0433	

$$\underline{\bar{I}}_q = \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 2.5 - j4.330 \\ \hline \end{array} \quad \text{A}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{\varphi}_1$$

$$\underline{U}_2 = \underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_2$$

$$\underline{U}_3 = \underline{\varphi}_2$$

$$\underline{U}_4 = \underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_2$$

$$\underline{U}_5 = \underline{\varphi}_3$$

$$\underline{\bar{U}} = \underline{\bar{K}}_T * \underline{\bar{\varphi}}$$

$$\underline{\bar{K}}_T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 1 & -1 & \\ \hline & 1 & \\ \hline & -1 & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}$$

Eingabe $\underline{\bar{K}}_T, \underline{\bar{Y}}, \underline{\bar{I}}_q$ in HP48, danach Berechnung nach Formeln ($\underline{\bar{K}}$ auch berechnen)

$$\underline{\bar{\varphi}}' = [\underline{\bar{K}} * \underline{\bar{Y}} * \underline{\bar{K}}_T]^{-1} * \underline{\bar{K}} * \underline{\bar{I}}_q$$

$$\underline{\bar{U}} = \underline{\bar{K}}_T * \underline{\bar{\varphi}} = \underline{\bar{K}}_T [\underline{\bar{K}} * \underline{\bar{Y}} * \underline{\bar{K}}_T]^{-1} * \underline{\bar{K}} * \underline{\bar{I}}_q$$

$$\underline{\bar{I}} = \underline{\bar{Y}} * \underline{\bar{U}} = \underline{\bar{Y}} * \underline{\bar{K}}_T [\underline{\bar{K}} * \underline{\bar{Y}} * \underline{\bar{K}}_T]^{-1} * \underline{\bar{K}} * \underline{\bar{I}}_q$$

ergibt

$$\underline{U}_1 = 110 \text{ V}/\underline{32.3^\circ}$$

$$\underline{U}_2 = 13.3 \text{ V}/\underline{98.54^\circ}$$

$$\underline{U}_3 = 105 \text{ V}/\underline{25.6^\circ}$$

$$\underline{U}_4 = 17.8 \text{ V}/\underline{172^\circ}$$

$$\underline{U}_5 = 90.7 \text{ V}/\underline{31.9^\circ}$$

6.9. Drehstrom	200
6.9.1. Mehrphasen-Wechselströme	200
6.9.2. Schaltungen der Quelle	201
6.9.2.1. Sternschaltung	201
6.9.2.2. Dreieckschaltung	204
6.9.3. Schaltungen der Verbraucher	205
6.9.3.1. Symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter	205
6.9.3.2. Symmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter	208
6.9.3.3. Symmetrische Dreieckschaltung	208
6.9.3.4. Unsymmetrische Dreieckschaltung	211
6.9.3.5. Unsymmetrische Sternschaltung mit Nulleiter	213
6.9.3.6. Unsymmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter	215
6.9.3.7. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 6.9.3	217
6.9.4. Rechts- und linksdrehendes Drehstromsystem	220
6.9.5. Leistungsmessung bei Drehstrom	222
6.9.5.1. Ein-Wattmeter-Methode	222
6.9.5.2. Drei-Wattmeter-Methode	222
6.9.5.3. Zwei-Wattmeter-Methode (Aron Schaltung)	223
6.9.6. Drehfaktor	224
6.9.7. Symmetrische Komponenten	225
6.10. Erzeugung von Wechselstrom	226

6.9. Drehstrom

Warum und wozu wird Drehstrom verwendet?

- Übertrag hoher Leistungen
- über 99 % aller elektrischer Energie wird als Drehstrom erzeugt.
- Bessere Auswertung der Geräte
- Einphasen Wechselstrom bedingt zeitliche Wirkleistungspendelung mit $2f = 100$ Hz. Bei Drehstrom ist die Summenwirkleistung konstant.
- Die Erzeugung von Drehstrom wird in Abschnitt 6.10 erläutert.

6.9.1. Mehrphasen-Wechselströme

Bislang wurden meist Netze mit einer Spannungsquellen betrachtet, die Spannung der Quelle wurde meist in die reelle Achse gelegt, siehe Bild EG691A.

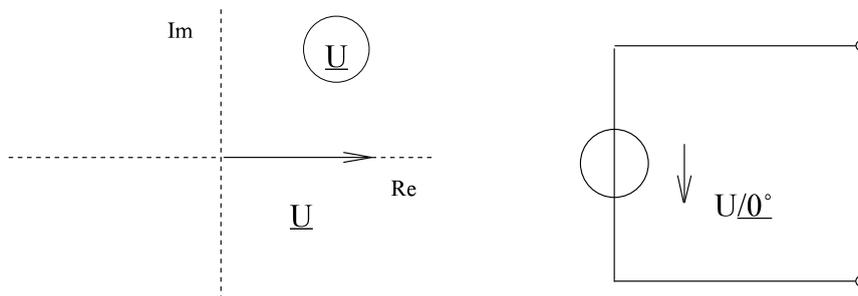


Bild EG691A: Einphasen-Wechselstrom

Bei Mehrphasen-Wechselströme sind m Spannungsquellen gleicher Amplitude vorhanden, deren Phasen um jeweils $360^\circ/m$ verschoben sind. Bild EG691B zeigt ein Beispiel für $m = 6$. Die Phasen sind dabei jeweils um $360^\circ/m = 60^\circ$ verschoben

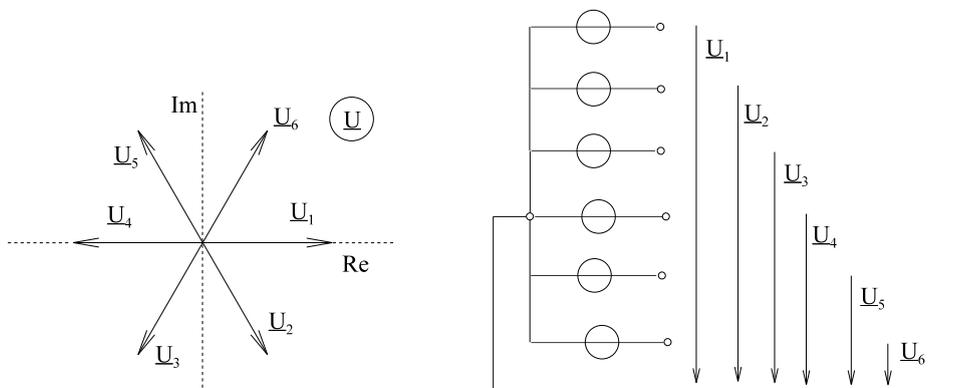


Bild EG691B: Sechshephasen-Wechselstrom

Großtechnische Anwendung findet in der Energieverteilung

$m = 3 \Rightarrow$ Dreiphasen-Wechselstrom = Drehstrom

Dabei gibt es verschiedene Schaltungsarten von Quelle und Verbraucher.

6.9.2. Schaltungen der Quelle

Im allgemeinen sind drei symmetrische Wechselspannungsquellen vorhanden, um jeweils 120° phasenverschoben, siehe Bild EG692A.

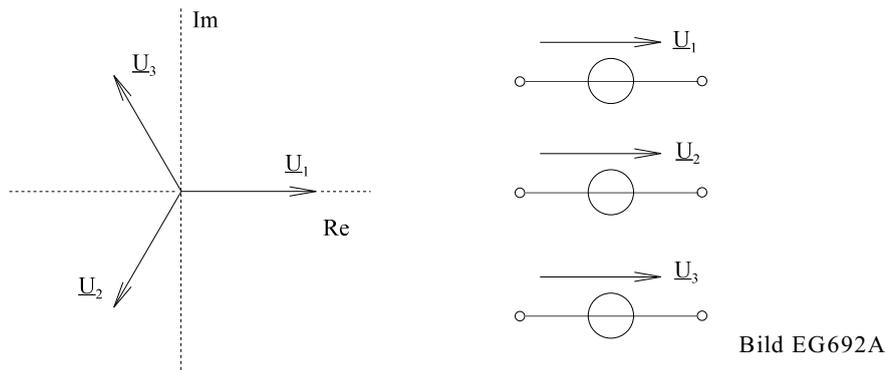


Bild EG692A

Drei Spannungsquellen würden normalerweise sechs Leitungen bedingen. In Energieversorgungsnetzen sind aber nur drei oder vier Leitungen üblich. Dazu gibt es zwei Schaltungsvarianten der Quellen, die in den nächsten Unterabschnitten erläutert werden.

6.9.2.1. Sternschaltung (Zusammenfassung auf Arbeitsblatt EGII-21)

Dazu werden die Quellen sternförmig nach Bild EG6921A zusammengeschaltet.

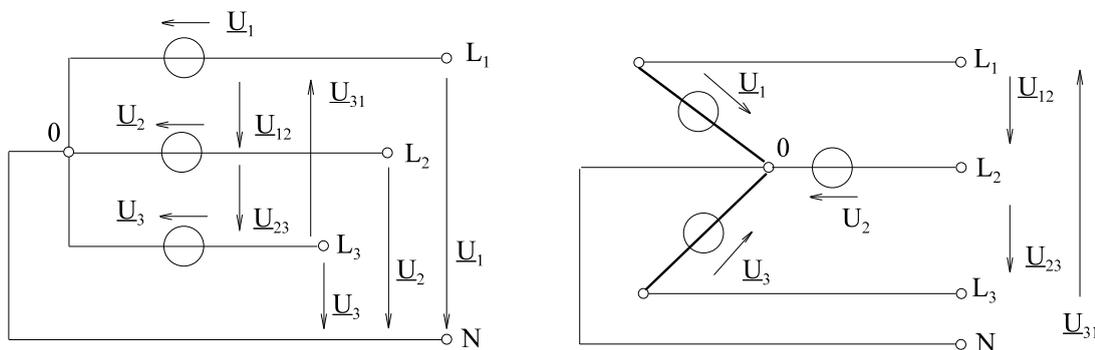


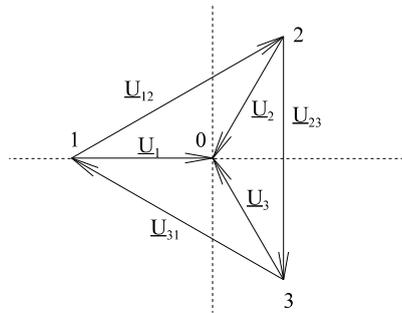
Bild EG6921A: Sternschaltung der Quellen (0 = Sternpunkt)

Nach Bild EG6921A ergeben sich die sechs Spannungen \underline{U}_1 , \underline{U}_2 , \underline{U}_3 , \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} und \underline{U}_{31} . Die Spannungen lassen sich unterteilen in

\underline{U}_1 , \underline{U}_2 , \underline{U}_3 - Sternpunktspannungen

\underline{U}_{21} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} - Leiter-Leiter-Spannungen, verkettete Spannungen, Leiter-Spannungen

Den Zeitverlauf bestimmt man am besten mit Hilfe der komplexen Rechnung. Die Spannungen \underline{U}_1 , \underline{U}_2 und \underline{U}_3 sind um jeweils 120° phasenverschoben \underline{U}_2 eilt \underline{U}_1 um 120° nach und \underline{U}_3 eilt \underline{U}_2 nach. Die Spannung \underline{U}_1 kann die reelle Achse gelegt werden, siehe Bild EG6921B.



$$\underline{U}_1 = U_{\text{str}} / 0^\circ = U_{\text{str}}$$

$$\underline{U}_2 = U_{\text{str}} / -120^\circ = U_{\text{str}} \left(-0.5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\underline{U}_3 = U_{\text{str}} / -240^\circ = U_{\text{str}} \left(-0.5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Bild EG6921B

Die verketteten Leiterspannungen ergeben sich als Differenzspannungen sowohl nach Bild EG6921A als auch nach Bild EG69251B:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = U_{\text{str}} \left[e^{j0^\circ} - e^{-j120^\circ} \right] = \sqrt{3} U_{\text{str}} / 30^\circ$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 = U_{\text{str}} \left[e^{-j120^\circ} - e^{-j240^\circ} \right] = \sqrt{3} U_{\text{str}} / -90^\circ$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1 = U_{\text{str}} \left[e^{-j240^\circ} - e^{j0^\circ} \right] = \sqrt{3} U_{\text{str}} / -210^\circ$$

Damit ergibt sich zwischen Strang- und Leiterspannungen der Faktor $\sqrt{3}$ bei der Stern-Schaltung:

$$U_{\text{Leiter}} = \sqrt{3} * U_{\text{str}}$$

$$400 \text{ V} = \sqrt{3} * 230.9 \text{ V}$$

$$\text{Früher: } \frac{380 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$$

Mit den komplexen Zeigern lässt sich der Verlauf der Spannungen zeichnerisch darstellen, siehe Arbeitsblatt EGII-21.

Konstruktionstips für den Fall, dass die Spannungen noch nicht gekennzeichnet sind:

- U_1 kennzeichnen
- U_2 120° später U_1
- U_3 120° später U_2
- $u_{12}(t) = 0$ wenn $U_1 = U_2$
- $u_{12}(t) > 0$ wenn $U_1 > U_2$
- $u_{23}(t) = 0$ wenn $U_2 = U_3$
- $u_{23}(t) > 0$ wenn $U_2 > U_3$ oder u_{23} 120° später u_{12}
- $u_{31}(t) = 0$ wenn $U_3 = U_1$
- $u_{31}(t) > 0$ wenn $U_3 > U_1$ oder u_{31} 120° später u_{23}

Bei Drehstromnetzen gibt es entweder Drei- oder Vierleiternetze. Der Unterschied wird später bei den Verbraucher-Schaltungen noch behandelt.

Die Netzspannung wird immer als Leiterspannung angegeben.

Eine andere Möglichkeit, die Spannungen zu beschreiben und zu konstruieren:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1 / 0^\circ = \frac{U}{\sqrt{3}} / 0^\circ \quad \underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = \sqrt{3} U_1 * / 30^\circ = U / 30^\circ$$

$$\underline{U}_2 = U_1 * e^{-j120^\circ} = \frac{U}{\sqrt{3}} / -120^\circ \quad \underline{U}_{23} = \underline{U}_{12} * e^{-j120^\circ} = U / -90^\circ$$

$$\underline{U}_3 = U_1 * e^{-j240^\circ} = \frac{U}{\sqrt{3}} / -240^\circ \quad \underline{U}_{31} = \underline{U}_{12} * e^{-j240^\circ} = U / -210^\circ$$

Arbeitsblatt EGII-21

Sternschaltung Quelle

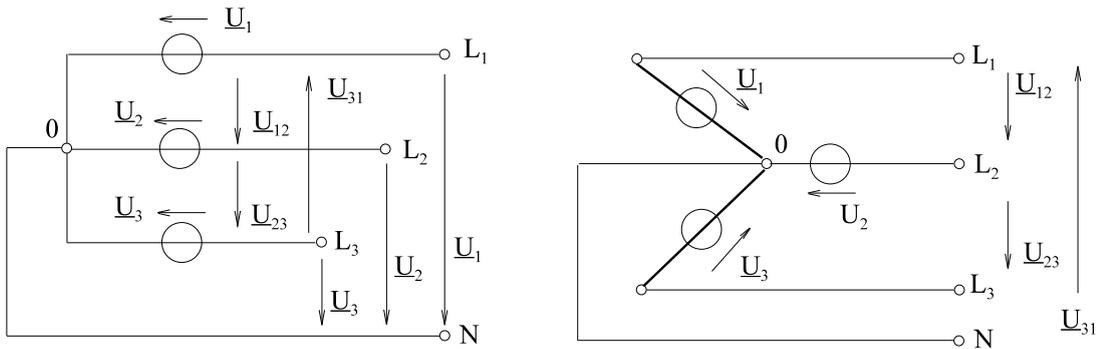
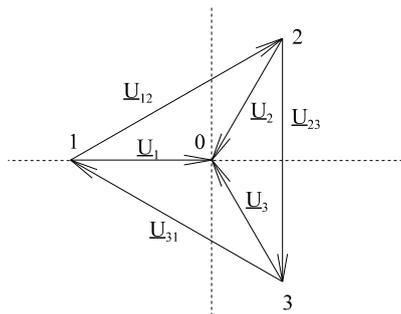


Bild EG6921A: Sternschaltung der Quellen 0 = Sternpunkt



$$\underline{U}_1 = U_{str} / 0^\circ = U_{str}$$

$$\underline{U}_2 = U_{str} / -120^\circ = U_{str} \left(-0.5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\underline{U}_3 = U_{str} / -240^\circ = U_{str} \left(-0.5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Bild EG6921B

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = U_{str} [e^{j0^\circ} - e^{-j120^\circ}] = \sqrt{3} U_{str} / 30^\circ$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 = U_{str} [e^{-j120^\circ} - e^{-j240^\circ}] = \sqrt{3} U_{str} / -90^\circ$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1 = U_{str} [e^{-j240^\circ} - e^{j0^\circ}] = \sqrt{3} U_{str} / -210^\circ$$

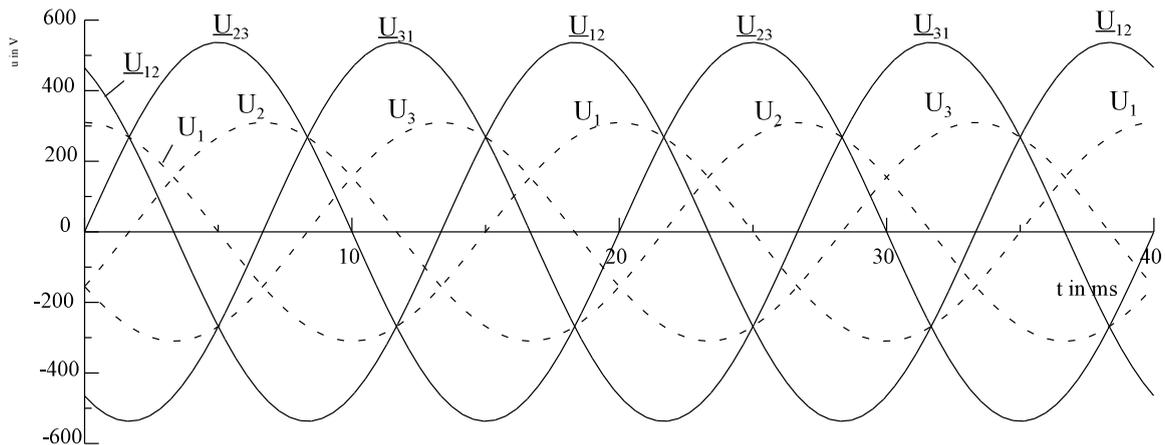


Bild EG6921C: Verlauf von Leiter- und Strangspannungen $U_{Leiter} = 400 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$

6.9.2.2. Dreieckschaltung

Dazu werden die Quellen dreieckförmig nach Bild EG6922A zusammengeschaltet.

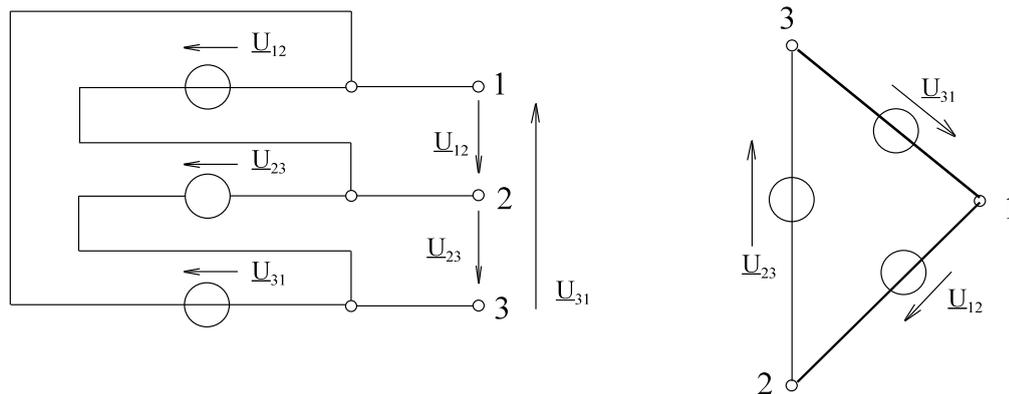
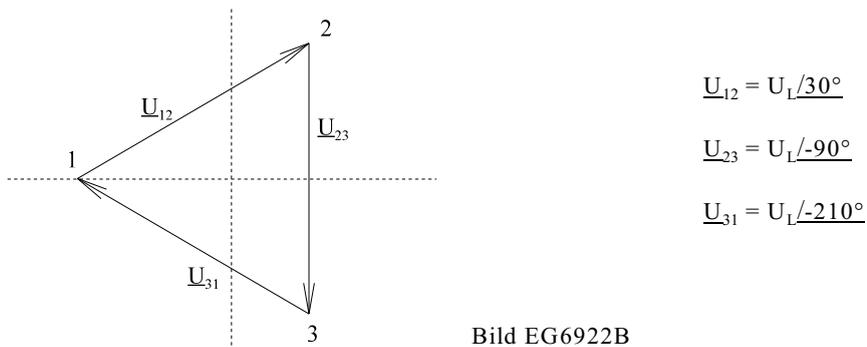


Bild EG6922A

Warum die Dreieckschaltung ihren Namen bekommen hat, ist aus dem linken Teil von Bild EG6922A nicht zu erkennen, wohl aber aus dem rechten Teil des Bildes. Bei der Dreieckschaltung sind nur drei Spannungen vorhanden, jeweils um 120° phasenverschoben, siehe Bild EG6922B.



Die Wahl des Winkeloffsets ist beliebig. Hier könnte eine der Leiterspannung zu 0° gewählt werden. Damit mit der Sternschaltung identische Winkel vorhanden sind, wird auch hier der Winkel von U_{12} zu 30° gewählt.

Bei der Dreieckschaltung sind Strang- und Leiterspannungen gleich

$$U_{\text{str}} = U_L$$

Der Vergleich der Bilder EG6922B und EG621B zeigt an der Klemmen (1, 2, 3) keinen Unterschied. Die Spannungen nach außen hin können (bei geschickter Wahl der Größen) bei Stern- und Dreieckschaltung die gleichen sein.

6.9.3. Schaltungen der Verbraucher

In den Unterabschnitten dieses Kapitel sollen untersucht werden:

- symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter
- symmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter
- symmetrische Dreieckschaltung
- unsymmetrische Dreieckschaltung
- unsymmetrische Sternschaltung mit Nulleiter
- unsymmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter.

Im Prinzip wären alle Schaltungen mit den Methoden für lineare Netzwerke, Kap. 6.8, zu berechnen. Dabei ergebe sich ein komplexes Gleichungssystem der Ordnung 3 mal \underline{z} , also dreifacher Ordnung. Da symmetrische Drehstromverbraucher sehr häufig vorkommen, sollen bessere Möglichkeiten gefunden werden, Drehstromnetze einfacher zu berechnen.

6.9.3.1. Symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter

(Zusammenfassung auf Arbeitsblatt EGII-22)

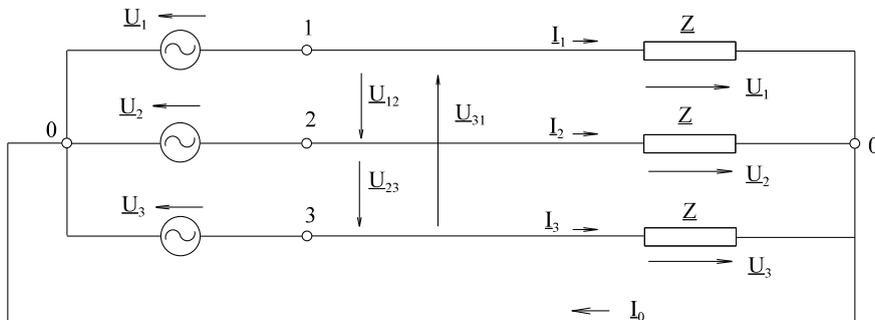


Bild EG6931A: Symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter

Durch die Verbindung der beiden Sternpunkte von Verbraucher und Quelle liegen die entsprechenden Strangspannungen der Quelle n auch an den Verbrauchern, siehe Bild EG6931A. Das ohmsche Gesetz liefert

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_1 * e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_1 * e^{-j120^\circ}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_1 * e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_1 * e^{-j240^\circ}$$

hier bilden die Ströme I_1 bis I_3 auch ein symmetrisches Drehstromsystem. Der Strom im Nulleiter ergibt sich aus der Knotensumme im Sternpunkt:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 [1 + e^{j120^\circ} + e^{j240^\circ}] = 0$$

Wichtig: Bei der symmetrischen Sternschaltung mit Nulleiter ist der Strom im Nulleiter Null.

Strangstrom - Leiterstrom

Da der Leiterstrom auch durch den Strang fließt gilt:

$$I_L = I_{str}$$

Strangspannung - Leiterspannung

Aus Kap. 6.9.2.1 folgt,

$$U_L = \sqrt{3} * U_{str}$$

daß die Leiterspannungen um den Faktor $\sqrt{3}$ größer sind, als die Strangspannungen.

Leistung

Die komplexe Scheinleistung an den drei Verbrauchern wird aufsummiert:

$$\underline{S} = \underline{U}_1 * \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 * \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 * \underline{I}_3^*$$

$$\underline{S} = \underline{U}_1 * \underline{I}_1^* + \underline{U}_1 * e^{-j120^\circ} * \underline{I}_1^* * e^{j120^\circ} + \underline{U}_1 * e^{-j240^\circ} * \underline{I}_1^* * e^{j240^\circ}$$

$$\underline{S} = 3 * \underline{U}_1 * \underline{I}_1^* \qquad S = 3 * U_1 * I_1$$

Fazit: Im symmetrischen Fall kann mit der dreifachen Leistung eines Stranges gerechnet werden.

$$\underline{I}_1 = \frac{U_1}{\underline{Z}} \quad \underline{I}_1^* = \frac{U_1^*}{\underline{Z}^*} \qquad \underline{Z} = Z * e^{j\varphi_z} \quad \underline{Z}^* = Z * e^{-j\varphi_z}$$

$$\underline{S} = 3 * \underline{U}_1 * \frac{U_1^*}{\underline{Z}^*} = \frac{3 * U_1^2}{Z * e^{-j\varphi_z}} = 3 * U_1 * \frac{U_1}{Z} * e^{j\varphi_z}$$

$$\underline{S} = 3 * U_1 * I_1 * e^{j\varphi_z}$$

$$\underline{S} = 3 * U_1 * I_1 * [\cos(\varphi_z) + j \sin(\varphi_z)]$$

Messbar von außen sind die Leitergrößen deshalb wird ersetzt:

$$U_1 = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \qquad \text{und } I_1 = I_L$$

$$\underline{S} = 3 * \frac{U_L}{\sqrt{3}} * I_L * e^{j\varphi_z} = \sqrt{3} * U_L * I_L * e^{j\varphi_z}$$

$$\underline{S} = S * e^{j\varphi_z} = \sqrt{3} * U_L * I_L * [\cos(\varphi_z) + j \sin(\varphi_z)] = P + jQ$$

$$S = \sqrt{3} * U_L * I_L$$

$$P = \sqrt{3} * U_L * I_L * \cos(\varphi_z)$$

$$Q = \sqrt{3} * U_L * I_L * \sin(\varphi_z)$$

Arbeitsblatt EGII-22

Symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter

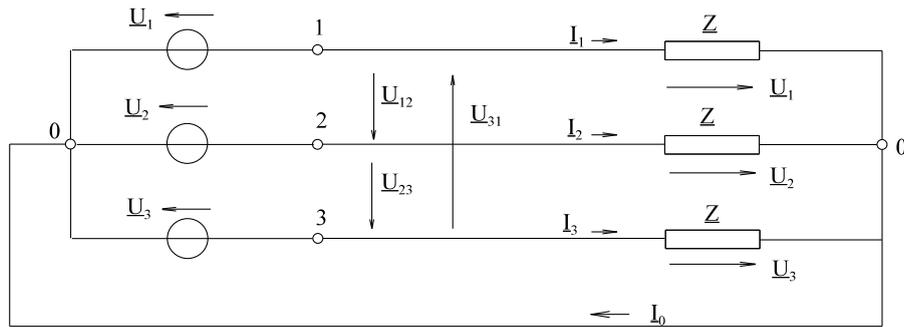


Bild EG6931A: Symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter

gegeben: $\underline{U}_1 = 230.9 \text{ V}/0^\circ$

$\underline{Z} = 50 \Omega/20^\circ$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{230.9 \text{ V}/0^\circ}{50 \Omega/20^\circ} = 4.618 \text{ A}/-20^\circ$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_1 * e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_1 * e^{-j120^\circ} = 4.618 \text{ A}/-140^\circ$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_1 * e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_1 * e^{-j240^\circ} = 4.618 \text{ A}/-260^\circ$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 [1 + e^{-j120^\circ} + e^{-j240^\circ}] = 0$$

Wichtig: Bei der symmetrischen Sternschaltung mit Nulleiter ist der Strom im Nulleiter Null.

Zusammenhang: Strang-Leiter-Größen

$$\underline{I}_L = \underline{I}_{str} \quad \underline{U}_L = \sqrt{3} * \underline{U}_{str} \quad \text{hier: } \underline{U}_L = \sqrt{3} * 230.9 \text{ V} = 400 \text{ V}$$

Leistungen:

$$S = \sqrt{3} * \underline{U}_L * \underline{I}_L \quad P = \sqrt{3} * \underline{U}_L * \underline{I}_L * \cos(\varphi_z) \quad Q = \sqrt{3} * \underline{U}_L * \underline{I}_L * \sin(\varphi_z)$$

$$S = 3200 \text{ VA}$$

$$P = 3007 \text{ WQ} = 1094 \text{ Var}$$

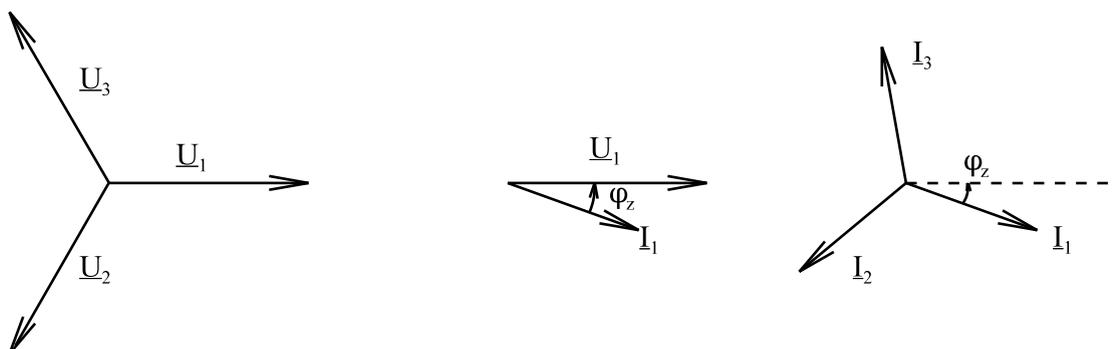


Bild EG6931B

6.9.3.2. Symmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter

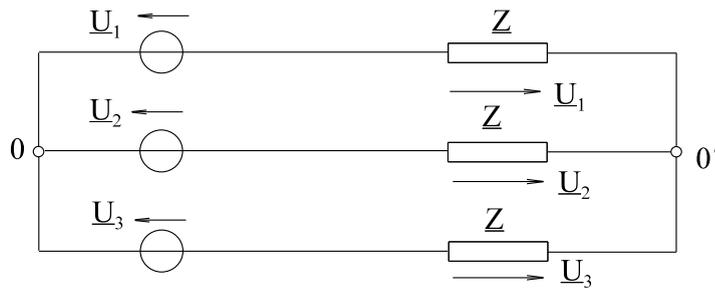


Bild EG6932A

Im letzten Abschnitt wurde festgestellt, dass in der leitenden Verbindung 0 - 0' kein Strom fließt. Wenn das so ist, kann diese auch entfernt werden, ohne das sich was ändert. Somit ergeben sich für die symmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter die gleichen Formeln als im letzten Abschnitt für die symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter.

6.9.3.3. Symmetrische Dreieckschaltung

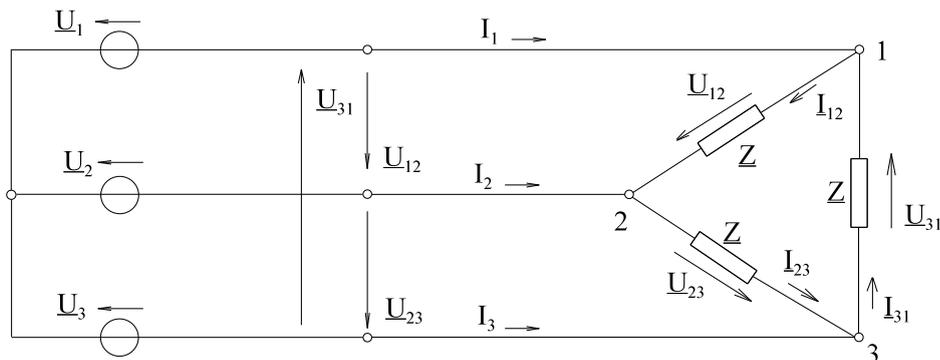


Bild EG6933A: Symmetrische Dreieckschaltung

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{12} / \varphi_{u12} - \varphi_z}{\underline{Z}}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{12} * e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{12} * e^{-j120^\circ}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{12} * e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{12} * e^{-j240^\circ}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12} [1 - e^{-j240^\circ}] = \underline{I}_{12} \sqrt{3} / -30^\circ$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = \underline{I}_{12} [e^{-j120^\circ} - 1] = \underline{I}_{12} \sqrt{3} / -150^\circ$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = \underline{I}_{12} [e^{-j240^\circ} - e^{-j120^\circ}] = \underline{I}_{12} \sqrt{3} / -270^\circ$$

Die Leiterströme sind vom Betrag das $\sqrt{3}$ fache der Strangströme. Die Phase ist um jeweils 120° nacheilend.

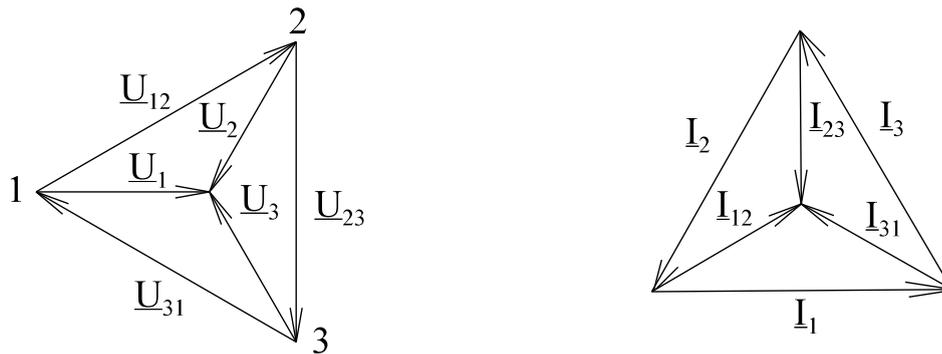
Beispiel ohmsche Belastung ($\varphi_z = 0$)


Bild EG6933B

Strangspannung - Leiterspannung

$$U_L = U_{str}$$

Strangstrom

$$I_{str} = \frac{U_L}{Z}$$

Strangstrom => Leiterstrom

$$I_L = \sqrt{3} * I_{str}$$

Leistung

$$\underline{S} = \underline{S}_{12} + \underline{S}_{23} + \underline{S}_{31}$$

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} * \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23} * \underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31} * \underline{I}_{31}^*$$

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} * \frac{\underline{U}_{12}^*}{\underline{Z}^*} + \underline{U}_{12} * e^{-j120^\circ} * \frac{\underline{U}_{12}^* * e^{j120^\circ}}{\underline{Z}^*} + \underline{U}_{12} * e^{-j240^\circ} * \frac{\underline{U}_{12}^* * e^{j240^\circ}}{\underline{Z}^*} = 3 \frac{U_{12}^2}{Z^*} = 3 \frac{U_{12}^2}{Z^* e^{-j\varphi}}$$

$$\underline{S} = 3 * U_{12}^2 \frac{1}{Z} * e^{j\varphi} = 3 * U_{12} * I_{12} * e^{j\varphi}$$

$$U_{12} = U_L \quad I_{12} = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

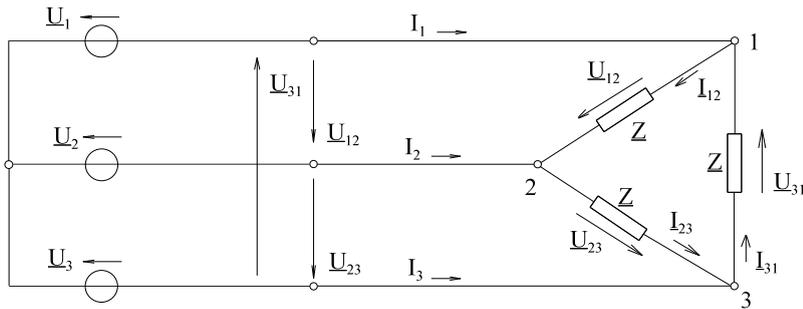
$$\underline{S} = 3 * U_L * \frac{I_L}{\sqrt{3}} * e^{j\varphi}$$

$$\underline{S} = \sqrt{3} * U_L * I_L * [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)]$$

Vom den Leitergrößen her sind die Formeln für die Leistung bei der symmetrischen Stern- und Dreiecksschaltung gleich.

Arbeitsblatt EGII-23

Symmetrische Dreieckschaltung



gegeben:

$$\underline{U}_{12} = 400 \text{ V} / \underline{30^\circ}$$

$$\underline{Z} = 50 \ \Omega / \underline{20^\circ}$$

Bild EG6933A: Symmetrische Dreieckschaltung

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{400 \text{ V} / \underline{30^\circ}}{50 \ \Omega / \underline{20^\circ}} = 8.00 \text{ A} / \underline{10^\circ}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{12} * e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{12} * e^{-j120^\circ} = 8.00 \text{ A} / \underline{-110^\circ}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{12} * e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{12} * e^{-j240^\circ} = 8.00 \text{ A} / \underline{-230^\circ}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12} [1 - e^{-j240^\circ}] = \underline{I}_{12} \sqrt{3} / \underline{-30^\circ} = 8.00 \text{ A} / \underline{10^\circ} * \sqrt{3} / \underline{-30^\circ} = 13.86 \text{ A} / \underline{-20^\circ}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = \underline{I}_{12} [e^{-j120^\circ} - 1] = \underline{I}_{12} \sqrt{3} / \underline{-150^\circ} = 13.86 \text{ A} / \underline{-140^\circ}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = \underline{I}_{12} [e^{-j240^\circ} - e^{-j120^\circ}] = \underline{I}_{12} \sqrt{3} / \underline{-270^\circ} = 13.86 \text{ A} / \underline{-260^\circ}$$

Zusammenhang: Strang-Leiter-Größen

$$I_L = \sqrt{3} * I_{str}$$

$$U_L = U_{str}$$

$$\text{Leistungen: } S = \sqrt{3} * U_L * I_L$$

$$S = 9600 \text{ VA}$$

$$P = \sqrt{3} * U_L * I_L * \cos(\varphi_z) \quad Q = \sqrt{3} * U_L * I_L * \sin(\varphi_z)$$

$$P = 9021 \text{ WQ} = 3283 \text{ Var}$$

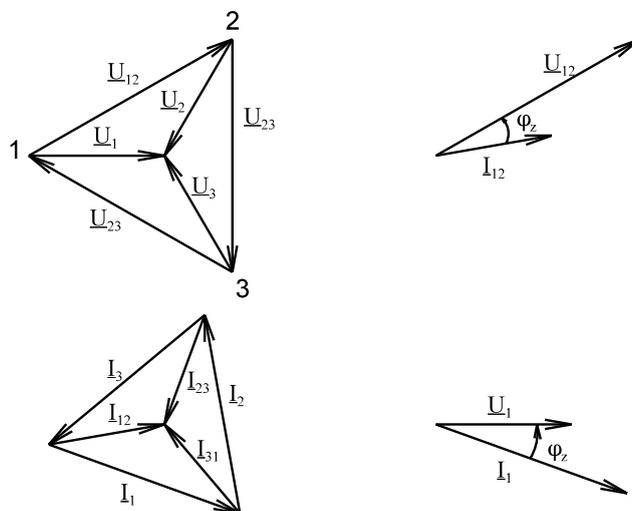


Bild EG6933C

6.9.3.4. Unsymmetrische Dreieckschaltung

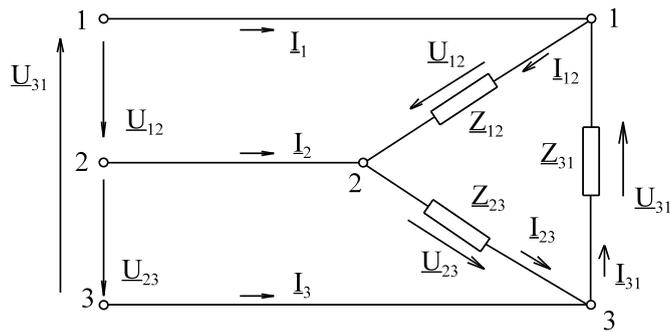


Bild EG6934A

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{12} * e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{12} * e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}_{31}}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

Leistung

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} * \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23} * \underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31} * \underline{I}_{31}^*$$

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} * \frac{\underline{U}_{12}^*}{\underline{Z}_{12}^*} + \underline{U}_{12} * e^{-j120^\circ} * \frac{\underline{U}_{12}^* * e^{j120^\circ}}{\underline{Z}_{23}^*} + \underline{U}_{12} * e^{-j240^\circ} * \frac{\underline{U}_{12}^* * e^{j240^\circ}}{\underline{Z}_{31}^*}$$

$$\underline{S} = U_{12}^2 \left(\frac{1}{\underline{Z}_{12}^*} + \frac{1}{\underline{Z}_{23}^*} + \frac{1}{\underline{Z}_{31}^*} \right)$$

$$\underline{S} = U_I^2 = \left[\frac{1}{\underline{Z}_{12}} * e^{j\varphi_{12}} + \frac{1}{\underline{Z}_{23}} * e^{j\varphi_{23}} + \frac{1}{\underline{Z}_{31}} * e^{j\varphi_{31}} \right]$$

Arbeitsblatt EGII-24 Unsymmetrische Dreieckschaltung

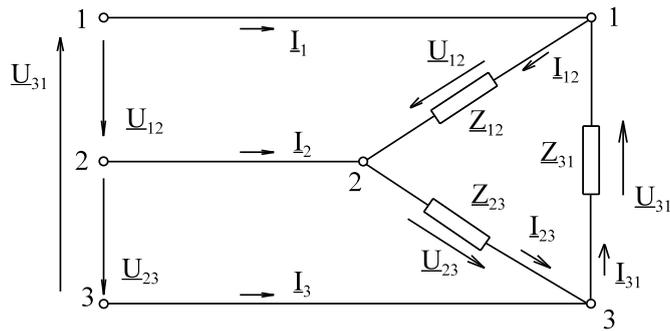


Bild EG6934B

- gegeben:** $\underline{U}_1 = 230.9 \text{ V } /0^\circ$
 $\underline{U}_2 = 230.9 \text{ V } /-120^\circ$
 $\underline{U}_3 = 230.9 \text{ V } /-240^\circ$
 $\underline{Z}_{12} = 15 \Omega /-60^\circ$
 $\underline{Z}_{23} = 20 \Omega /-40^\circ$
 $\underline{Z}_{31} = 30 \Omega /-20^\circ$

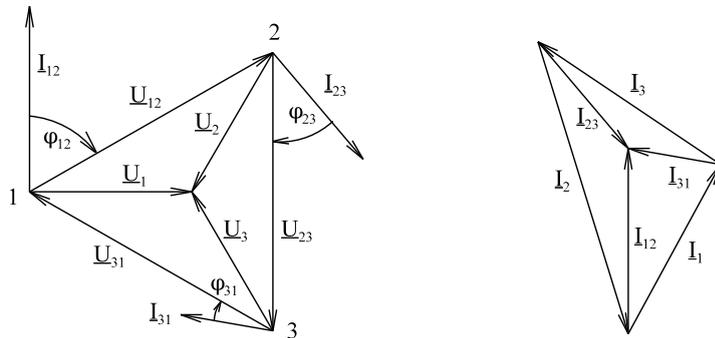


Bild EG6934C

- Lösung:** $\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$
 $\underline{U}_{12} = 400 \text{ V } /30^\circ$
 $\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}$
 $\underline{I}_{12} = 26.67 \text{ A } /90^\circ$
 $\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}$
 $\underline{I}_1 = 27.67 \text{ A } /61.67^\circ$
- $\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3$
 $\underline{U}_{23} = 400 \text{ V } /-90^\circ$
 $\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}$
 $\underline{I}_{23} = 20 \text{ A } /-50^\circ$
 $\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}$
 $\underline{I}_2 = 43.91 \text{ A } /-72.98^\circ$
- $\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1$
 $\underline{U}_{31} = 400 \text{ V } /-210^\circ$
 $\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}$
 $\underline{I}_{31} = 13.33 \text{ A } /-190^\circ$
 $\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$
 $\underline{I}_3 = 31.41 \text{ A } /145.84^\circ$

6.9.3.5. Unsymmetrische Sternschaltung mit Nulleiter

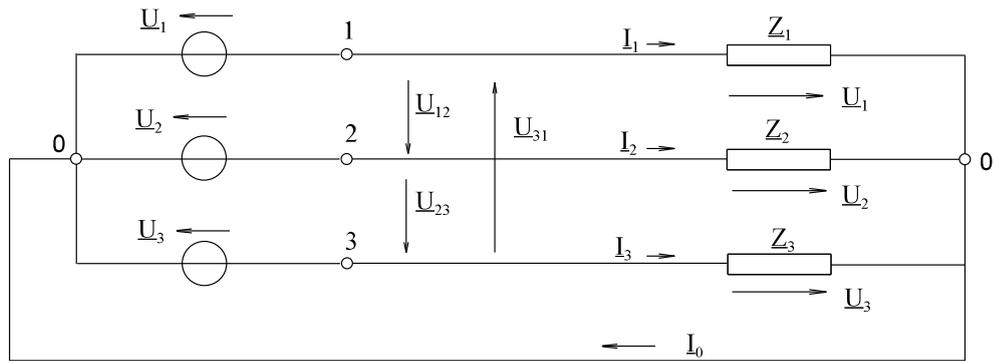


Bild EG6935A

Weil die Sternpunkte verbunden sind, wirkt die Schaltung wie drei Wechselspannungsquellen, die drei Verbraucher versorgen, siehe Bild EG6921A.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_1 * e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_1 * e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}_3}$$

Der Strom \underline{I}_0 im Nulleiter ergibt sich durch Summierung

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_0 = \underline{U}_1 \left[\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}_2} + \frac{e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}_3} \right]$$

Leistung

$$\underline{S} = \underline{U}_1 * \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 * \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 * \underline{I}_3^*$$

$$\underline{S} = U_1^2 * \frac{1}{\underline{Z}_1^*} + U_2^2 * \frac{1}{\underline{Z}_2^*} + U_3^2 * \frac{1}{\underline{Z}_3^*}$$

$$U_1^2 = \frac{U_L^2}{3} = U_2^2 = U_3^2$$

$$\underline{S} = \frac{U_L^2}{3} \left[\frac{1}{\underline{Z}_1} * e^{j\varphi_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} * e^{j\varphi_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} * e^{j\varphi_3} \right]$$

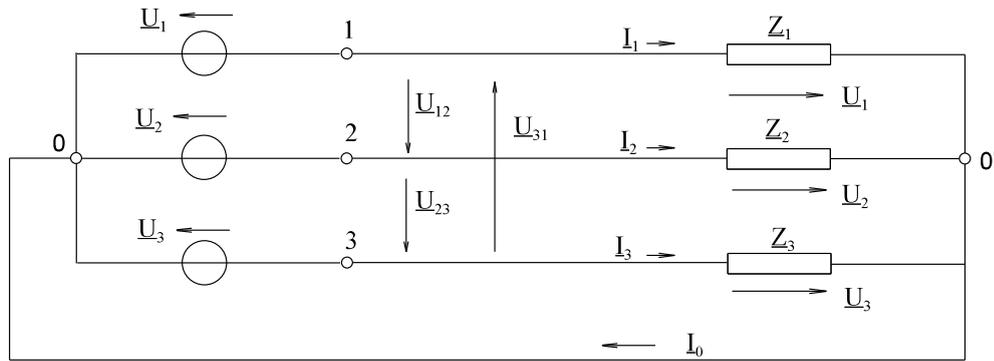
Arbeitsblatt EGII-25 Unsymmetrische Sternschaltung mit Nulleiter

Bild EG6935A

gegeben: $Z_1 = 36 \Omega / 10^\circ$ $Z_2 = 56 \Omega / 15^\circ$ $Z_3 = 112 \Omega / 20^\circ$

$\underline{U}_{\text{str}} = 230.9 \text{ V}$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{230.9 \text{ V} / 10^\circ}{36 \Omega / 10^\circ} = 6.42 \text{ A} / -10^\circ$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{230.9 \text{ V} / -120^\circ}{56 \Omega / 15^\circ} = 4.12 \text{ A} / -135^\circ$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{230.9 \text{ V} / -240^\circ}{112 \Omega / 20^\circ} = 2.06 \text{ A} / 100^\circ$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 3.64 \text{ A} / -33.30^\circ$$

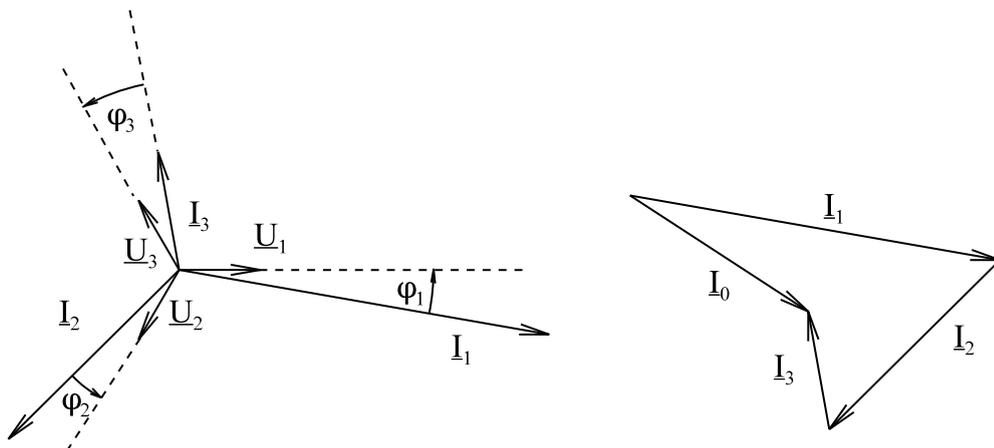


Bild EG6935B

6.9.3.6. Unsymmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter

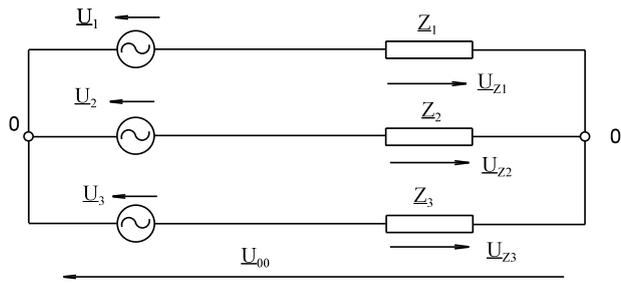


Bild EG6936A

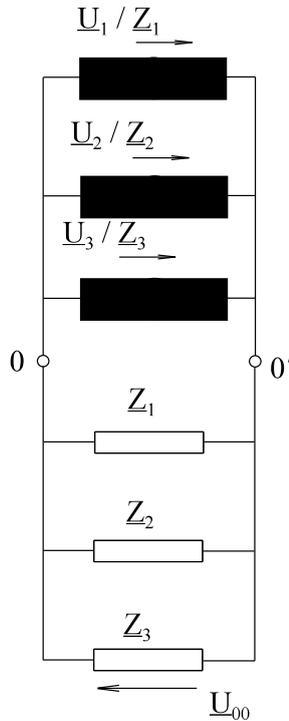
Wird der Nulleiter weggelassen (siehe Bild EG6936A), ergibt sich eine Spannung U_{00} zwischen den Sternpunkten von Verbraucher und Quelle. Dadurch sind die Spannungen Verbraucher Strang und Quelle nicht mehr gleich, sondern nach Bild EG6936A ergibt sich:

$$U_{Z1} = U_1 - U_{00}$$

$$U_{Z2} = U_2 - U_{00}$$

$$U_{Z3} = U_3 - U_{00}$$

Wäre die Spannung U_{00} bekannt, bereitet die Berechnung des oberen Netzwerkes keine Schwierigkeit. Da gibt es nun verschiedene Methoden, z.B. Methoden aus Kap. 6.8: lineare Wechselstromnetze. Durch Netzwerk-Umformung ergibt sich:



$$Z_{123} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}$$

$$I_q = \frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_2}{Z_2} + \frac{U_3}{Z_3}$$

$$I_q = U_1 \left[\frac{1}{Z_1} + \frac{e^{-j120^\circ}}{Z_2} + \frac{e^{-j240^\circ}}{Z_3} \right]$$

Bild EG6936B

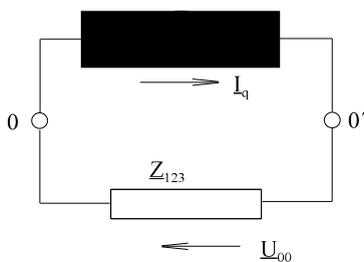


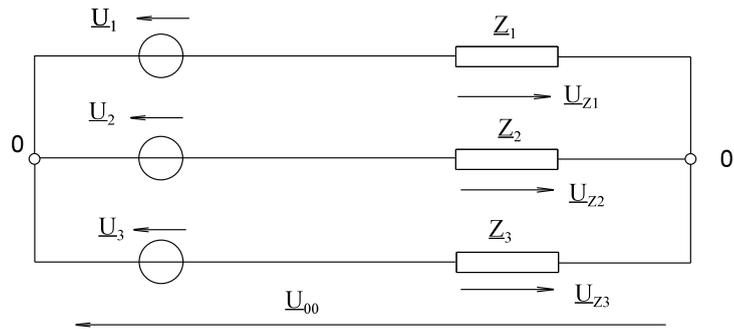
Bild EG6936C

$$U_{00} = I_q * Z_{123}$$

Damit können die einzelnen Stränge berechnet werden.

Arbeitsblatt EGII-26

Unsymmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter



gegeben:

$$\underline{Z}_1 = 36 \Omega / 10^\circ$$

$$\underline{Z}_2 = 56 \Omega / 15^\circ$$

$$\underline{Z}_3 = 112 \Omega / 20^\circ$$

$$\underline{U}_{\text{str}} = 219.4 \text{ V} = \frac{380 \text{ V}}{\sqrt{3}}$$

alt!

$$\frac{400 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 230.9 \text{ V neu}$$

Bild EG6936A

alt: 380V neu: 400 V

$$\underline{I}_q = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = 3.46 \text{ A} / -33.30^\circ$$

$$\underline{Z}_{123} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = 18.37 \Omega / 13.27^\circ$$

$$\underline{U}_{00} = \underline{I}_q \cdot \underline{Z}_{123} = 63.5 \text{ V} / -20.03^\circ$$

$$\underline{U}_{Z1} = \underline{U}_1 - \underline{U}_{00} = 219.4 \text{ V} / 0^\circ - 63.5 \text{ V} / -20.03^\circ = 161.2 \text{ V} / 7.76^\circ$$

$$\underline{U}_{Z2} = \underline{U}_2 - \underline{U}_{00} = 219.4 \text{ V} / -120^\circ - 63.5 \text{ V} / -20.03^\circ = 238.7 \text{ V} / -135.20^\circ$$

$$\underline{U}_{Z3} = \underline{U}_3 - \underline{U}_{00} = 219.4 \text{ V} / -240^\circ - 63.5 \text{ V} / -20.03^\circ = 271.2 \text{ V} / 128.66^\circ$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{Z1}}{\underline{Z}_1} = \frac{161.2 \text{ V} / 7.75^\circ}{36 \Omega / 10^\circ} = 4.48 \text{ A} / -2.24^\circ$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{Z2}}{\underline{Z}_2} = \frac{238.7 \text{ V} / -135.19^\circ}{56 \Omega / 15^\circ} = 4.26 \text{ A} / -150.20^\circ$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{Z3}}{\underline{Z}_3} = \frac{271.2 \text{ V} / 128.65^\circ}{112 \Omega / 20^\circ} = 2.42 \text{ A} / 108.66^\circ$$

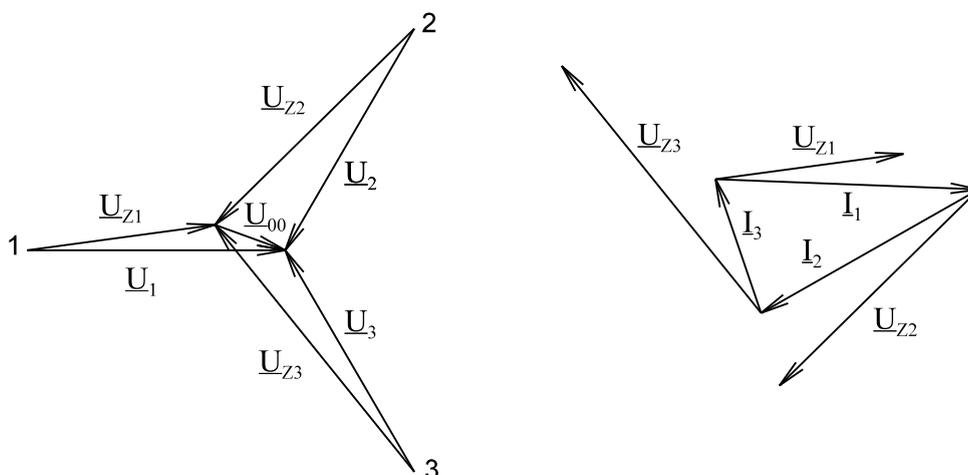


Bild EG6936D

6.9.3.7. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 6.9.3

Beispiel 1

Ein 400 V-Netz ohne Nulleiter wird mit einer symmetrischen Last in Sternschaltung belastet. Die Spannung \underline{U}_1 ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.

$$\underline{Z} = 2 \Omega + j1 \Omega$$

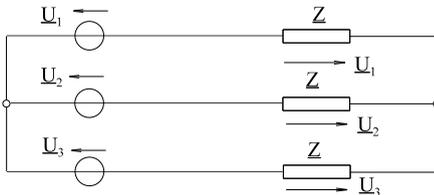
Lösungsweg:

gegeben: $U_L = 400 \text{ V}$ - Netz ohne Nulleiter, symmetrische Last in Stern

\underline{U}_1 rein reell

gesucht:

ESB, $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, I_1, I_2, I_3, S, P, Q$



$$\underline{Z} = 2 \Omega + j1 \Omega = 2.236 \Omega / 26.57^\circ$$

$$Z = 2.236 \Omega \quad \varphi_z = 26.57^\circ$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_L = \frac{U_L}{\sqrt{3} * Z} = \frac{400V}{\sqrt{3} * 2.236 \Omega} = 103.3A$$

$$\underline{I}_1 = I_L / -\varphi_z = 103.3 \text{ A} / -26.56^\circ$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 / -120^\circ = 103.3 \text{ A} / -146.46^\circ$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 / -240^\circ = 103.3 \text{ A} / -266.56^\circ$$

$$S = \sqrt{3} * U_L * I_L = \sqrt{3} * 400V * 103.3A = 71.57 \text{ kVA}$$

$$P = S * \cos(\varphi_z) = 71.57 \text{ kVA} * \cos(26.57^\circ) = 64.01 \text{ kW}$$

$$Q = S * \sin(\varphi_z) = 71.57 \text{ kVA} * \sin(26.57^\circ) = 32.01 \text{ kVar}$$

Beispiel 2

Ein 400 V-Netz wird mit einer symmetrischen Last in Dreieckschaltung belastet. Die Spannung \underline{U}_1 ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.

$$\underline{Z} = 40 \Omega + j30 \Omega$$

Lösungsweg:

gegeben: $U_L = 400 \text{ V}$ - Netz symmetrische Last in Dreieck

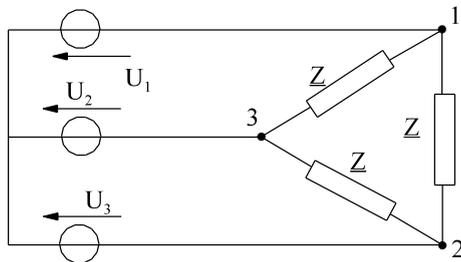
\underline{U}_1 rein reell

gesucht:

ESB, $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, \underline{I}_{12}, \underline{I}_{23}, \underline{I}_{31}, S, P, Q$

$$\underline{Z} = 40 \Omega + j30 \Omega = 50.00 \Omega / 36.87^\circ$$

$$Z = 50.00 \Omega \quad \varphi_z = 36.87^\circ$$



$$\underline{U}_1 = \frac{400V}{\sqrt{3}} / 0^\circ$$

$$I_{str} = I_{12} = I_{23} = I_{31} = \frac{U_L}{Z} = \frac{400V}{50.00 \Omega} = 8.000A$$

$$I_L = I_1 = I_2 = I_3 = \sqrt{3} * I_{str} = \sqrt{3} * 8.000A = 13.86A$$

$$\underline{I}_1 = I_L / -\varphi_z = 13.86 \text{ A} / -36.87^\circ$$

$$\underline{I}_{12} = \underline{I}_L / (\varphi_{u12} - \varphi_z) = 8.000 \text{ A} / (30^\circ - 36.87^\circ) = 8.000 \text{ A} / -6.87^\circ$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 / -120^\circ = 13.86 \text{ A} / -156.87^\circ$$

$$\underline{I}_{23} = \underline{I}_{12} / -120^\circ = 8.000 \text{ A} / -126.87^\circ$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 / -240^\circ = 13.86 \text{ A} / -276.87^\circ$$

$$\underline{I}_{31} = \underline{I}_{12} / -240^\circ = 8.000 \text{ A} / -246.87^\circ$$

$$S = \sqrt{3} * U_L * I_L = \sqrt{3} * 400V * 13.86A = 9.602 \text{ kVA}$$

$$P = S * \cos(\varphi_z) = 9.602 \text{ kVA} * \cos(36.87^\circ) = 7.682 \text{ kW}$$

$$Q = S * \sin(\varphi_z) = 9.602 \text{ kVA} * \sin(36.87^\circ) = 5.761 \text{ kVar}$$

Beispiel 3

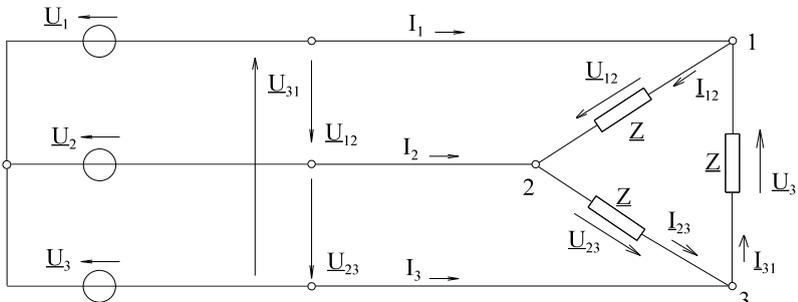
Ein 400 V-Netz wird mit einer unsymmetrischen Last in Dreieckschaltung belastet. Die Spannung \underline{U}_1 ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.

$\underline{Z}_{12} = 40 \Omega$ $\underline{Z}_{23} = -j40 \Omega$ $\underline{Z}_{31} = +j40 \Omega$

Lösungsweg:

gegeben: $U_L = 400 \text{ V}$ - Netz unsymmetrische Last in Dreieck
 \underline{U}_1 rein reell
 $\underline{Z}_{12} = 40 \Omega$ $\underline{Z}_{23} = -j40 \Omega$ $\underline{Z}_{31} = +j40 \Omega$

gesucht: ESB, $I_1, I_2, I_3, I_{12}, I_{23}, I_{31}, S, P, Q$



$$\underline{Z}_{12} = 40 \Omega = 40 \Omega / 0^\circ$$

$$\underline{Z}_{23} = -j40 \Omega = 40 \Omega / -90^\circ$$

$$\underline{Z}_{31} = +j40 \Omega = 40 \Omega / 90^\circ$$

$$\underline{U}_{12} = 400 \text{ V} / 30^\circ$$

$$\underline{U}_{23} = 400 \text{ V} / -90^\circ$$

$$\underline{U}_{31} = 400 \text{ V} / -210^\circ$$

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{400\text{V} / 30^\circ}{40\Omega / 0^\circ} = 10 \text{ A} / 30^\circ$$

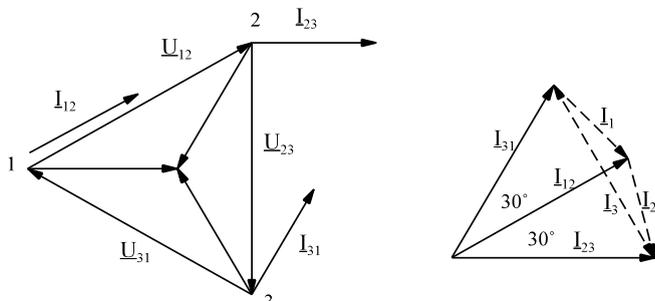
$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{400\text{V} / -90^\circ}{20\Omega / -90^\circ} = 10 \text{ A} / 0^\circ$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{400\text{V} / -210^\circ}{40\Omega / 90^\circ} = 10 \text{ A} / 60^\circ$$

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = 10 \text{ A} / 30^\circ - 10 \text{ A} / 60^\circ = 5.176 \text{ A} / -45^\circ$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12} = 10 \text{ A} / 0^\circ - 10 \text{ A} / 30^\circ = 5.176 \text{ A} / -75^\circ$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23} = 10 \text{ A} / 60^\circ - 10 \text{ A} / 0^\circ = 10 \text{ A} / 120^\circ$$



$$\underline{S}_{12} = \underline{U}_{12} * \underline{I}_{12}^* = 400\text{V} / 30^\circ * (10 \text{ A} / 30^\circ)^* = 4 \text{ kVA} / 0^\circ \Rightarrow P_{12} = 4 \text{ kW} \Rightarrow Q_{12} = 0$$

$$\underline{S}_{23} = \underline{U}_{23} * \underline{I}_{23}^* = 400\text{V} / -90^\circ * (10 \text{ A} / 0^\circ)^* = 4 \text{ kVA} / -90^\circ \Rightarrow P_{23} = 0 \Rightarrow Q_{23} = -4 \text{ kvar}$$

$$\underline{S}_{31} = \underline{U}_{31} * \underline{I}_{31}^* = 400\text{V} / -210^\circ * (10 \text{ A} / 60^\circ)^* = 4 \text{ kVA} / 90^\circ \Rightarrow P_{31} = 0 \Rightarrow Q_{31} = 4 \text{ kvar}$$

Beispiel 4

Ein 400 V-Netz mit Nulleiter wird mit einer unsymmetrischen Last in Sternschaltung belastet. Die Spannung \underline{U}_1 ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.

$$\underline{Z}_1 = (10 + j17.32) \Omega \quad \underline{Z}_2 = 20 \Omega \quad \underline{Z}_3 = (17.32 - j10) \Omega$$

Lösungsweg:

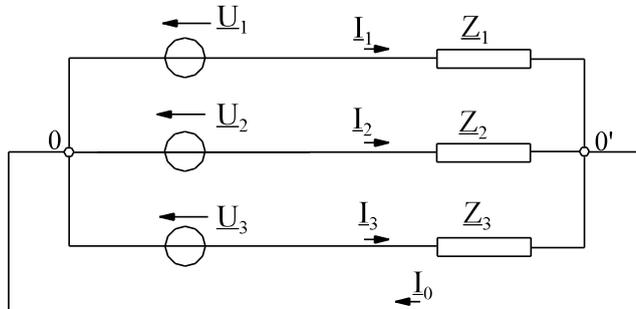
gegeben: $U_L = 400 \text{ V}$ - Netz unsymmetrische Last in Dreieck

\underline{U}_1 rein reell

$$\underline{Z}_1 = (10 + j17.32) \Omega \quad \underline{Z}_2 = 20 \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = (17.32 - j10) \Omega$$

gesucht: ESB, $I_1, I_2, I_3, I_{12}, I_{23}, I_{31}, S, P, Q$



$$\underline{Z}_1 = (10 + j17.32) \Omega = 20 \Omega / 60^\circ$$

$$\underline{Z}_2 = 20 \Omega = 20 \Omega / 0^\circ$$

$$\underline{Z}_3 = (17.32 - j10) \Omega = 20 \Omega / -30^\circ$$

$$400\text{V} / \sqrt{3} = 230.9\text{V}$$

$$\underline{U}_1 = 230.9 \text{ V} / 0^\circ$$

$$\underline{U}_2 = 230.9 \text{ V} / -120^\circ$$

$$\underline{U}_3 = 230.9 \text{ V} / -240^\circ$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{230.9\text{V} / 0^\circ}{20\Omega / 60^\circ} = 11.55 \text{ A} / -60^\circ$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{230.9\text{V} / -120^\circ}{20\Omega / 0^\circ} = 11.55 \text{ A} / -120^\circ$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{230.9\text{V} / -240^\circ}{20\Omega / -30^\circ} = 11.55 \text{ A} / -210^\circ$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 11.55 \text{ A} / -60^\circ + 11.55 \text{ A} / -120^\circ + 11.55 \text{ A} / -210^\circ = 17.39 \text{ A} / -125.10^\circ$$

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 * \underline{I}_1^* = 230.9\text{V} / 0^\circ * 11.55\text{A} / 60^\circ = 2667\text{kVA} / 60^\circ = 1334\text{W} + j2310 \text{ var}$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 * \underline{I}_2^* = 230.9\text{V} / -120^\circ * 11.55\text{A} / 120^\circ = 2667\text{kVA} / 0^\circ = 2667\text{W}$$

$$\underline{S}_3 = \underline{U}_3 * \underline{I}_3^* = 230.9\text{V} / -240^\circ * 11.55\text{A} / 210^\circ = 2667\text{kVA} / -30^\circ = 2310\text{W} - j1334 \text{ var}$$

$$\Rightarrow P_1 = 1334 \text{ W} \quad Q_1 = 2310 \text{ var}$$

$$\Rightarrow P_2 = 2667 \text{ W} \quad Q_2 = 0$$

$$\Rightarrow P_3 = 2310 \text{ W} \quad Q_3 = -1334 \text{ var}$$

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = 6311 \text{ W} + j976 \text{ Var}$$

Aufgabe 6.9.3.A

Ein 400 V-Netz ohne Nulleiter wird mit einer symmetrischen Last in Sternschaltung belastet. Die Spannung \underline{U}_1 ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.

$$\underline{Z} = 3 \Omega + j4 \Omega$$

Aufgabe 6.9.3.B

Ein 690 V-Netz wird mit einer symmetrischen Last in Dreieckschaltung belastet. Die Spannung \underline{U}_1 ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.

$$\underline{Z} = 6 \Omega + j8 \Omega$$

Aufgabe 6.9.3.C

Ein 400 V-Netz wird mit einer unsymmetrischen Last in Dreieckschaltung belastet. Die Spannung \underline{U}_1 ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.

$$\underline{Z}_{12} = 40 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_{23} = j40 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_{31} = -j40 \, \Omega$$

Aufgabe 6.9.3.D

Ein 400 V-Netz mit Nulleiter wird mit einer unsymmetrischen Last in Sternschaltung belastet. Die Spannung \underline{U}_1 ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.

$$\underline{Z}_1 = (17.32 - j10) \, \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = 20 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = (10 + j17.32) \, \Omega$$

6.9.4. Rechts- und linksdrehendes Drehstromsystem**normal:**

Rechtsdrehend

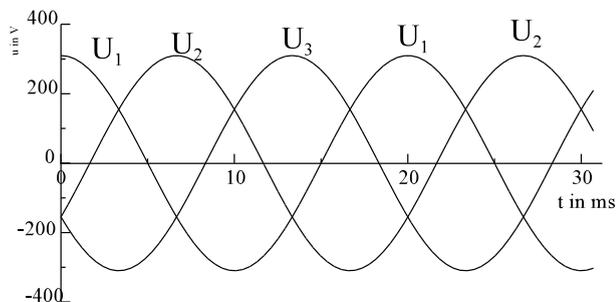
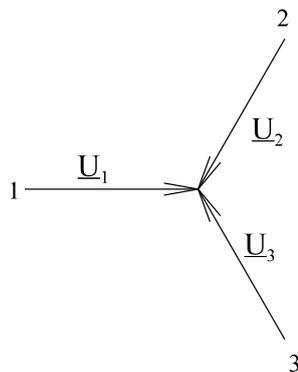


Bild EG694A

Sonderfall:

Linksdrehend

(2 Phasen vertauscht)

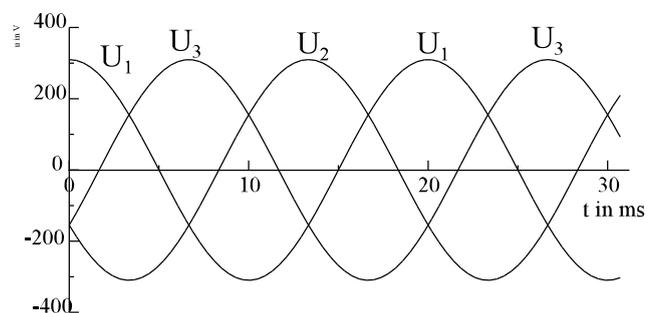
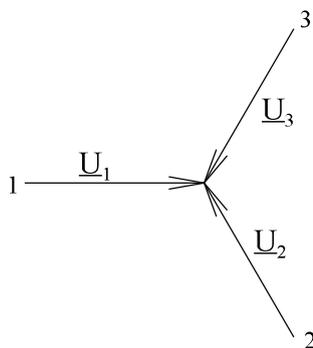
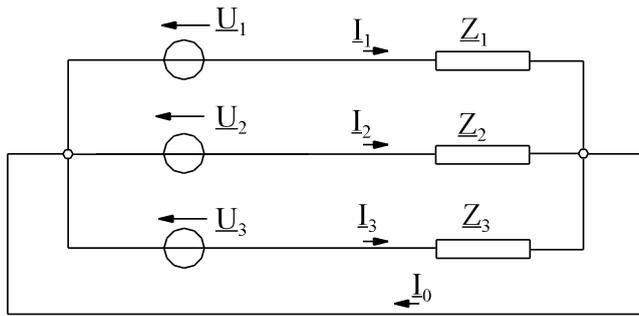


Bild EG694B

Beispiel rechtsdrehend:



gegeben:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= 230 \text{ V } /0^\circ \\ \underline{U}_2 &= 230 \text{ V } /-120^\circ \\ \underline{U}_3 &= 230 \text{ V } /-240^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= 23 \ \Omega /0^\circ \\ \underline{Z}_2 &= 46 \ \Omega /60^\circ \\ \underline{Z}_3 &= 46 \ \Omega /-60^\circ \end{aligned}$$

Bild EG694C

zu berechnen: $\underline{I}_1 = 10 \text{ A } /0^\circ$ $\underline{I}_2 = 5 \text{ A } /-180^\circ$ $\underline{I}_3 = 5 \text{ A } /-180^\circ$ $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$

=> quasi Symmetrisch weil Stromsumme Null

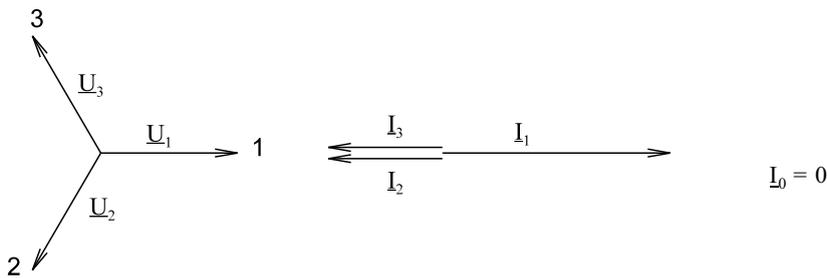
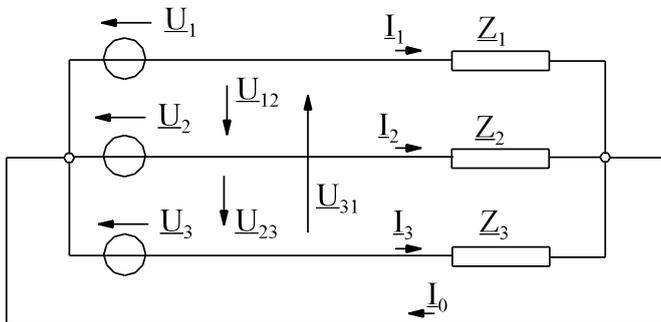


Bild EG694D

Beispiel linksdrehend:



gegeben:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= 230 \text{ V } /0^\circ \\ \underline{U}_2 &= 230 \text{ V } /-240^\circ \\ \underline{U}_3 &= 230 \text{ V } /-120^\circ \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{12} = \sqrt{3} * 230 \text{ V } /-30^\circ$$

$$\underline{U}_{23} = \sqrt{3} * 230 \text{ V } /90^\circ = \sqrt{3} * 230 \text{ V } /-270^\circ$$

$$\underline{U}_{31} = \sqrt{3} * 230 \text{ V } /210^\circ = \sqrt{3} * 230 \text{ V } /-150^\circ$$

Bild EG694E

$$\underline{Z}_1 = 23 \ \Omega /0^\circ \quad \underline{Z}_2 = 46 \ \Omega /60^\circ \quad \underline{Z}_3 = 46 \ \Omega /-60^\circ$$

zu berechnen: $\underline{I}_1 = 10 \text{ A } /0^\circ$ $\underline{I}_2 = 5 \text{ A } /-300^\circ = 5 \text{ A } /60^\circ$

$$\underline{I}_3 = 5 \text{ A } /-60^\circ \quad \underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 15 \text{ A } /0^\circ$$

!!! => Hochgradig unsymmetrisch bei gleicher Last, aber Phasen vertauscht.

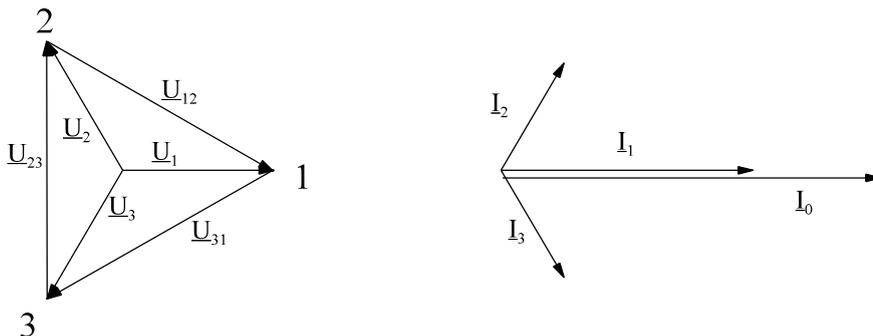
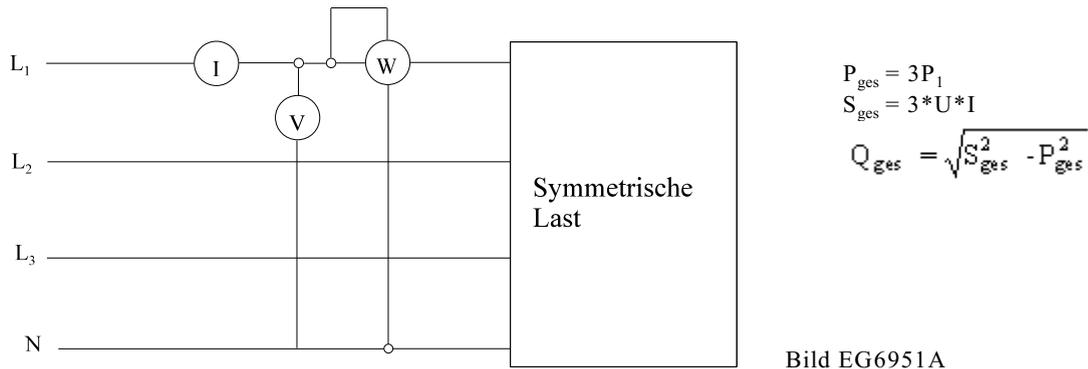


Bild EG694F

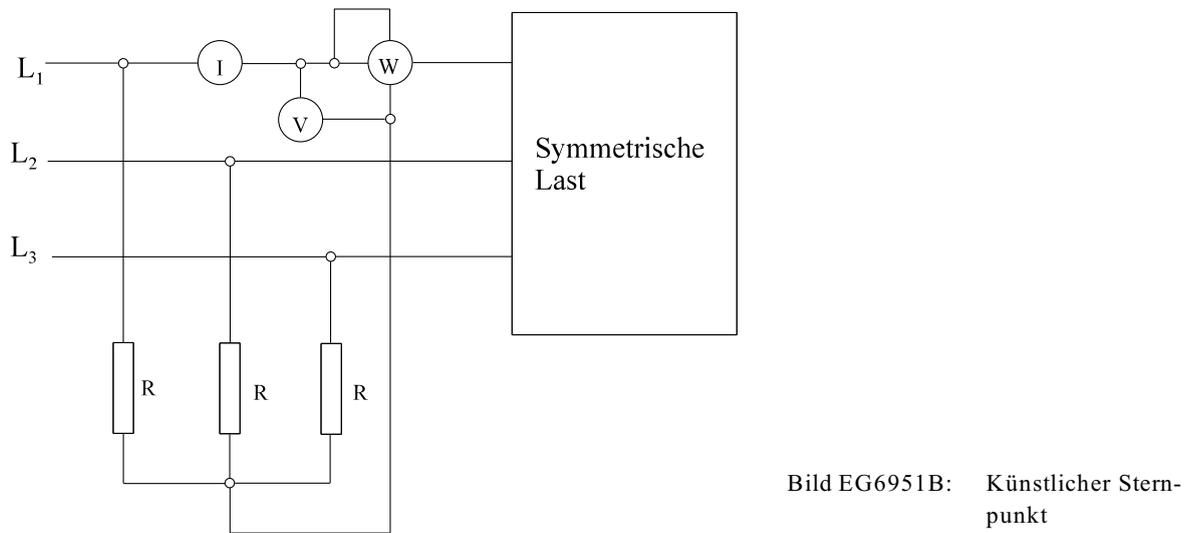
6.9.5. Leistungsmessung bei Drehstrom

6.9.5.1. Ein-Wattmeter-Methode

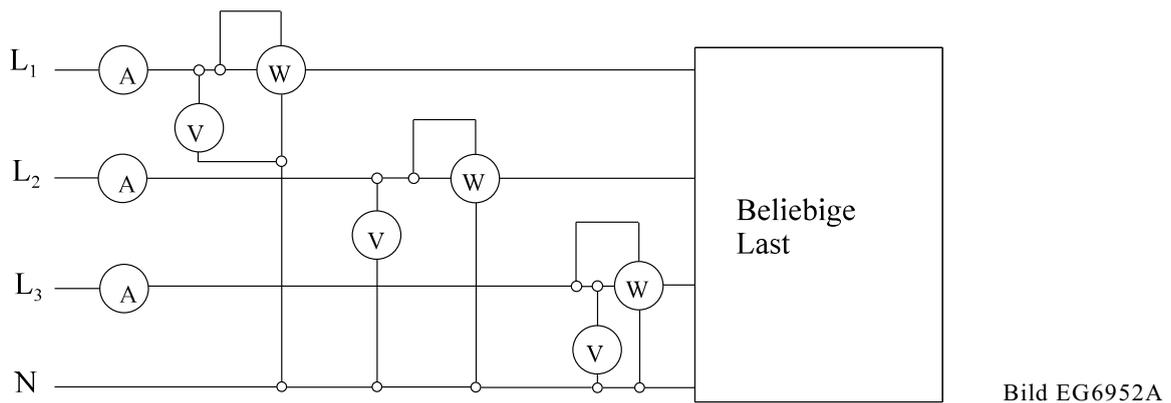


Wenn kein Sternpunkt vorhanden ist, muss ein künstlicher gebildet werden, siehe Bild EG6951B. Dabei muss gelten:

$$R \ll R_{me\ddot{a}}f$$



6.9.5.2. Drei-Wattmeter-Methode



$$S_1 = U_1 \cdot I_1$$

$$S_2 = U_2 \cdot I_2$$

$$S_3 = U_3 \cdot I_3$$

$$P_{ges} = P_1 + P_2 + P_3$$

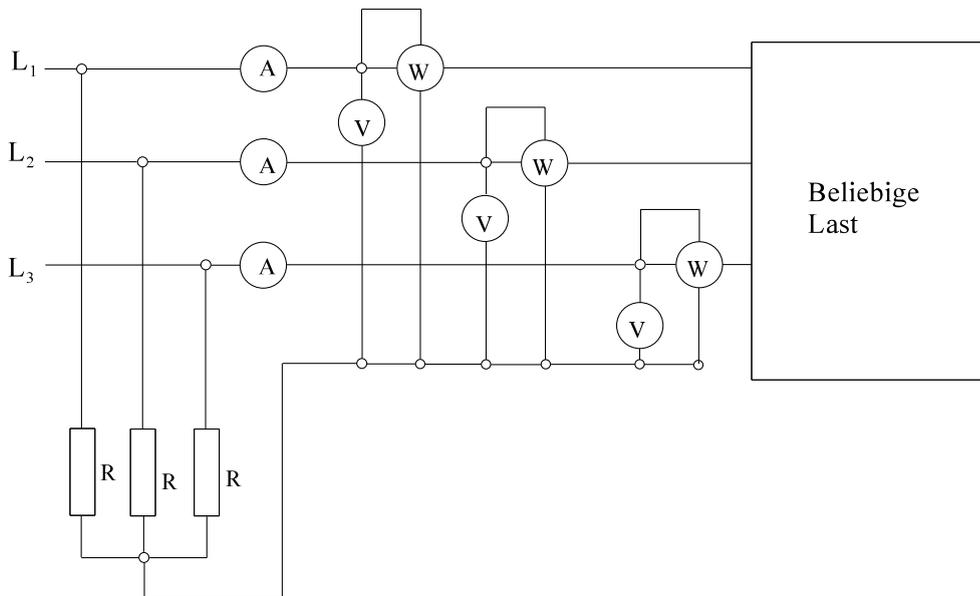
$$S_{ges} = \sqrt{P_{ges}^2 + Q_{ges}^2}$$

$$Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2}$$

$$Q_2 = \sqrt{S_2^2 - P_2^2}$$

$$Q_3 = \sqrt{S_3^2 - P_3^2}$$

$$Q_{ges} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Bild EG6952B: Mit künstlichen Sternpunkt ($R \ll R_{\text{meß}}$)

6.9.5.3. Zwei-Wattmeter-Methode (Aron Schaltung)

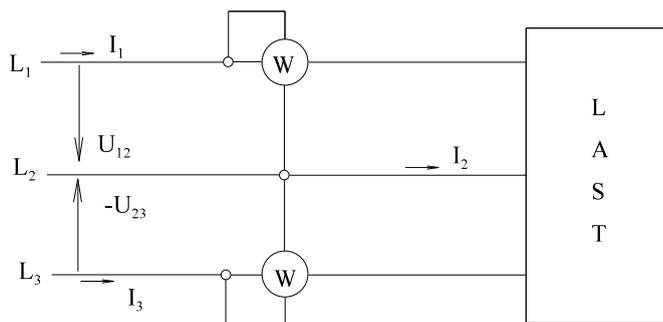


Bild EG6953A

$$P_1 = \operatorname{Re}\{\underline{U}_{12} * \underline{I}_1^*\}$$

$$P_2 = \operatorname{Re}\{\underline{U}_{32} * \underline{I}_3^*\}$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$$

$$\underline{U}_{32} = \underline{U}_3 - \underline{U}_2$$

$$P = P_1 + P_2 = \operatorname{Re}\left\{\left(\underline{U}_1 - \underline{U}_2\right) * \underline{I}_1^*\right\} + \operatorname{Re}\left\{\left(\underline{U}_3 - \underline{U}_2\right) * \underline{I}_3^*\right\}$$

$$P_1 - P_2 = \operatorname{Re}\left\{\underline{U}_{12} * \underline{I}_1^* - \underline{U}_{32} * \underline{I}_3^*\right\}$$

$$P_1 + P_2 = \operatorname{Re}\left\{\underline{U}_1 * \underline{I}_1^* - \underline{U}_2 * \underline{I}_1^* + \underline{U}_3 * \underline{I}_3^* - \underline{U}_2 * \underline{I}_3^*\right\}$$

$$P_1 + P_2 = \operatorname{Re}\left\{\underline{U}_1 * \underline{I}_1^* - \underline{U}_2 * (\underline{I}_1^* + \underline{I}_3^*) + \underline{U}_3 * \underline{I}_3^*\right\}$$

$$-(\underline{I}_1^* + \underline{I}_3^*) = \underline{I}_2$$

$$P_1 + P_2 = \operatorname{Re}\left\{\underline{U}_1 * \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 * \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 * \underline{I}_3^*\right\} = P_{\text{ges}}$$

$$P_{\text{ges}} = P_1 + P_2 \quad \text{Für beliebige Last}$$

Bedingung: Kein Nulleiter, weil $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$

$$(P_1 - P_2) = \operatorname{Re}\left\{\underline{U}_{12} * \underline{I}_1^* + \underline{U}_{23} * \underline{I}_3^*\right\}$$

Ansatz einer symmetrischen Last in Sternschaltung:

$$\underline{Z} = Z * e^{j\varphi}$$

$$\underline{U}_{12} = U_L / 30^\circ$$

$$\underline{U}_{23} = U_L / -90^\circ$$

$$\underline{U}_1 = U_{str} / 0^\circ$$

$$I_1 = I_L / -\varphi$$

$$I_1^* = I_L / \varphi$$

$$\underline{U}_3 = U_{str} / -240^\circ$$

$$I_3 = I_L / -240^\circ - \varphi$$

$$I_3^* = I_L / \varphi + 240^\circ$$

$$(P_1 - P_2) = \operatorname{Re} \{ U_L / 30^\circ * I_L / \varphi + U_L / -90^\circ * I_L / \varphi + 240^\circ \}$$

$$(P_1 - P_2) = U_L * I_L \operatorname{Re} \{ e^{+j\varphi} * (e^{j30^\circ} + e^{j150^\circ}) \}$$

$$e^{+j30^\circ} + e^{j150^\circ} = e^{j90^\circ}$$

$$(P_1 - P_2) = U_L * I_L \operatorname{Re} \{ e^{j\varphi} * e^{j90^\circ} \}$$

$$(P_1 - P_2) = U_L * I_L \operatorname{Re} \{ e^{j(\varphi+90^\circ)} \}$$

$$(P_1 - P_2) = U_L * I_L \cos(\varphi + 90^\circ) = U_L * I_L [-\sin(\varphi)]$$

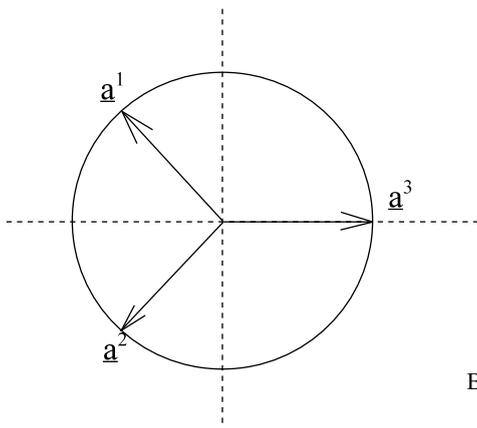
$$(P_2 - P_1) = U_L * I_L * \sin(\varphi)$$

$$Q = \sqrt{3} * U_L * I_L * \sin(\varphi) = \sqrt{3} * (P_2 - P_1)$$

$Q = \sqrt{3} (P_2 - P_1)$ rechteckdrehende Last symmetrisch	$P = P_1 + P_2$, kein Nulleiter
$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$	

Bedingung: kein Nulleiter und symmetrische Last

6.9.6. Drehfaktor



$$\underline{a} = e^{j120^\circ}$$

$$\underline{a}^2 = e^{-j120^\circ}$$

$$\underline{a}^3 = 1$$

Bild EG696A

$$\underline{U}_1 = U_{str}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{a}^2 * U_{str}$$

$$\underline{U}_3 = \underline{a}^1 * U_{str}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{a}^3 * U_{str}$$

$$\underline{U}_{12} = U_L / 30^\circ$$

$$\underline{U}_{12}$$

$$\underline{U}_{23} = U_L / -90^\circ$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{12} * \underline{a}^2$$

$$\underline{U}_{31} = U_L / -210^\circ$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{12} * \underline{a}$$

symmetrischer Fall

$$I_1$$

$$I_2 = I_1 * \underline{a}^2$$

$$I_3 = I_1 * \underline{a}$$

rechtsdrehend

linksdrehend

$$\underline{U}_2 = \underline{a}^2 * \underline{U}_1$$

$$\underline{U}_2 = \underline{a} * \underline{U}_1$$

$$\underline{U}_3 = \underline{a} * \underline{U}_1$$

$$\underline{U}_3 = \underline{a}^2 * \underline{U}_1$$

6.9.7. Symmetrische Komponenten

Anwendung: Unsymmetrische Last.

Ziel: Die unsymmetrische Größen sollen besser beschrieben werden.

Lösung: Es werden drei Systeme nach Bild EG697A eingeführt

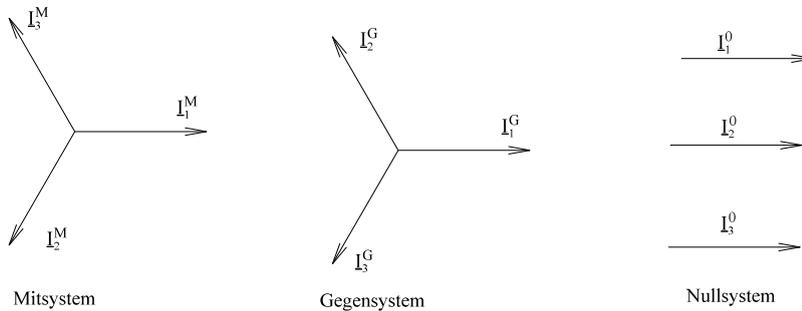


Bild EG697A

Mitsystem: normales Drehstromsystem (rechtsdrehend)

Gegensystem: entgegengesetzt drehendes Drehstromsystem (linksdrehend)

Nullsystem: 3 Quellen mit gleicher Phasenverschiebung (hier 0)

Aus Bild EG697A lässt sich mit Hilfe des Drehfaktors (Kap. 6.9.6) ablesen:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_M \quad \underline{I}_1^G = \underline{I}_G \quad \underline{I}_1^0 = \underline{I}_0$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_M * a^2 \quad \underline{I}_2^G = \underline{I}_G * a \quad \underline{I}_2^0 = \underline{I}_0$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_M * a \quad \underline{I}_3^G = \underline{I}_G * a^2 \quad \underline{I}_3^0 = \underline{I}_0$$

Durch den folgenden Ansatz soll versucht werden, die gegebenen unsymmetrischen Ströme \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_3 zu beschreiben:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1^M + \underline{I}_1^G + \underline{I}_1^0 \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2^M + \underline{I}_2^G + \underline{I}_2^0 \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_3^M + \underline{I}_3^G + \underline{I}_3^0$$

Die Größen "2" und "3" mit Hilfe des Drehfaktors \underline{a} ausgedrückt ergibt:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_M + \underline{I}_G + \underline{I}_0 \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_M * a^2 + \underline{I}_G * a + \underline{I}_0 \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_M * a + \underline{I}_G * a^2 + \underline{I}_0$$

Die oberen drei Gleichungen werden zur Matrix-Schreibweise zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_M \\ \underline{I}_G \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix}$$

Durch Invertieren der oberen Matrix erhält man:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_M \\ \underline{I}_G \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix}$$

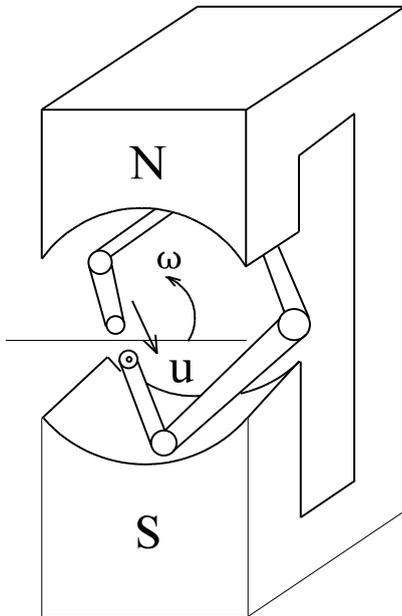
Damit lassen sich unsymmetrische Spannungen und Ströme durch 3 symmetrische Systeme beschreiben, die bei linearen Netzen überlagerbar sind.

6.10. Erzeugung von Wechselstrom

Es ist schon sehr viel über Wechselstrom diskutiert worden. Wie erzeugt man eigentlich Wechselstrom? Zwei Arten:

Energetechnik: durch Generatoren (wenig durch Stromrichter)
 Nachrichtentechnik: durch spezielle Schaltungen mit Schwingkreisen, Quarzen und anderen Bauelementen

Das Generatorprinzip soll hier kurz angedeutet werden.



Drehung einer Spule im Magnetfeld

Vorgriff aufs 3. Semester

$$u(t) = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = A \cdot B$$

$$A = A_{\max} \cdot \cos(\omega t)$$

$$\Phi = A_{\max} \cdot B \cdot \cos(\omega t)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -A_{\max} \cdot B \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

$$u = \frac{-N \cdot A_{\max} \cdot B \cdot \omega \cdot \hat{u}}{\hat{u}} \sin(\omega t)$$

$$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + 90^\circ)$$

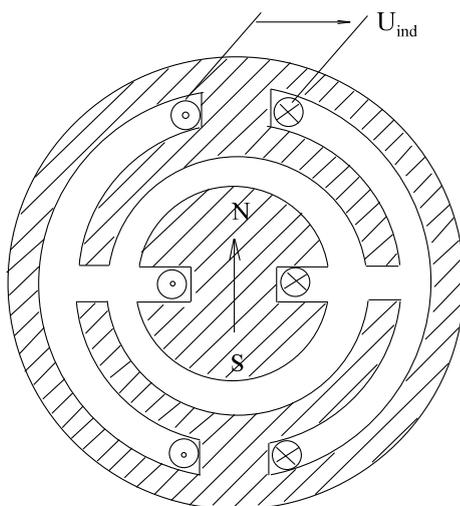
Bild EG610

\vec{B}

In realen Generatoren herrscht nun nicht ein homogenes Magnetfeld über so große Entfernungen. Im dritten Semester wird erläutert, daß der magnetische Kreis von Eisen geführt wird. Dadurch wird dann das magnetische Feld im Luftspalt annähernd homogen.

Merke: Durch Drehung einer Spule im Magnetfeld wird eine Spannung induziert.

Aber auch durch Drehung eines Magneten in einer Spulenordnung wird eine Spannung induziert, siehe Bild EG610B.



Generatoren arbeiten meist mit Innenpolen. Bei großen Generatoren wird nicht mit Magneten sondern mit Gleichstromspulen der magnetische Fluss erzeugt.

In der Energetechnik ist das Ziel, möglichst Spannungen ohne Oberschwingungen zu erzeugen. Oberschwingungen bilden Netzstörungen. Leitungen bilden größtenteils einen induktiven Widerstand => erhöhte Blindwiderstände für Oberwellen => größerer Spannungsabfall durch Oberwellen. Durch geometrische Form der Wicklungen und der Polschuhe im Generator können Oberwellen verhindert werden.

Bild EG610B

Drehstrom

Durch eine räumlich versetzte Anordnung der Spulen wird eine zeitlich Verschiebung des magnetischen Spulenflusses erreicht. Ordnet man drei Spulen um 120° räumlich versetzt an, ergeben sich auch Spannungen, die um 120° phasenverschoben sind.

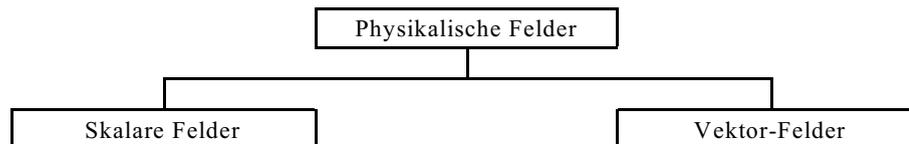
7. Elektrisches Strömungsfeld	227
7.1. Feldbegriffe	227
7.2. Feldarten in der Elektrotechnik	229
7.3. Stromdichte und Strom	230
7.4. Potential und Feldstärke	232
7.5. Ursache der elektrischen Strömung in Leitern	237
7.6. Ohmsches Gesetz in Elementarform	238
7.7. Leistungsdichte im Strömungsfeld	240
7.8. Feldlinien und Äquipotentiallinien	244
7.9. Berechnung des elektrischen Widerstandes	245
7.9.1. Analytische Methode	245
7.9.2. Grafische Methode	245
7.10. Verhalten an Grenzflächen	247
7.11. Abschließende Aufgaben zu Kap. 7	248

7. Elektrisches Strömungsfeld

7.1. Feldbegriffe

Was ist ein Feld?

- Ein Feld beschreibt einen physikalischen Zustand innerhalb eines Raumes (allgemein vierdimensionalen Raum).
 - 3 Koordinatenrichtungen x, y, z
 - Zeit t
- Dieser Zustand wird durch eine physikalische Feldgröße beschrieben, die jedem Punkt des Raumes zugeordnet wird.
- Die Gesamtheit aller Werte im Raum heißt Feld



Beispiele für skalare Felder:

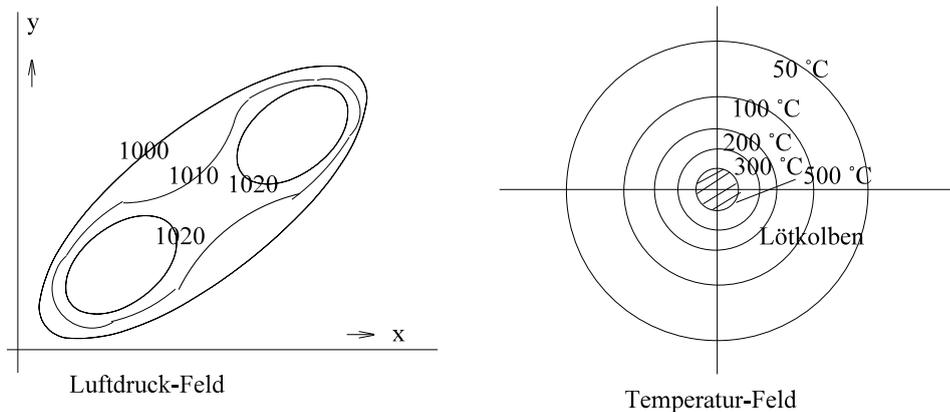


Bild EG71A

Beispiel für ein Vektorfeld: Strömungsfeld

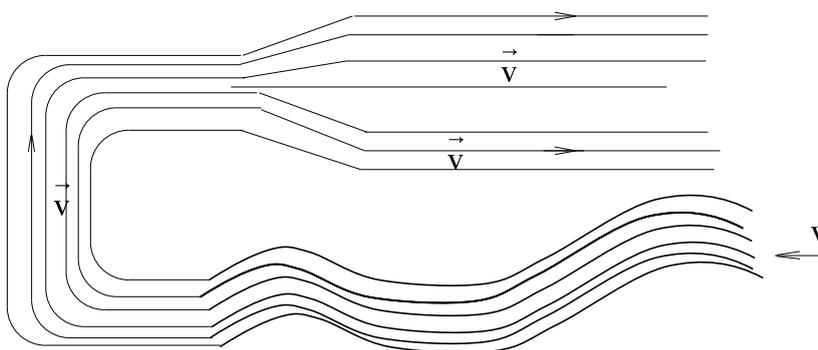


Bild EG71B

Feldlinie

Die mathematische Feldbeschreibung ist durch Formeln möglich. Anschaulicher aber sind Feldlinien. Was ist nun eine Feldlinie?

Die Feldlinien im Skalar-Feld heißen Potentiallinien

Die Potentiallinie ist der Ort wo die skalare physikalische Größen gleiche Werte aufweist (z.B. $\varphi = \text{const}$ oder $p = \text{const}$) Äquipotential- oder Potentiallinien werden diese Linien genannt.

Feldlinie im Vektorfeld

Im Vektorfeld ist die Feldlinie in Richtung des Feldvektors gerichtet (im Strömungsfeld in Richtung des \vec{v} -Vektors).

Die Dichte der Feldlinien ist ein Maß für den Betrag der Feldgröße.

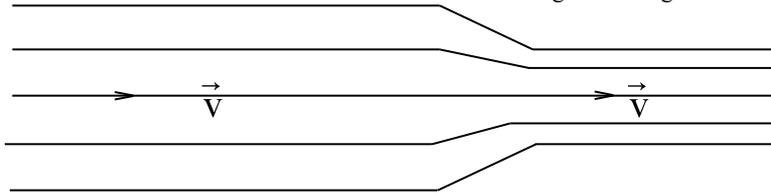


Bild EG71C

Homogene Felder sind durch äquidistante und parallele Feldlinien gekennzeichnet. Bei **inhomogenen** Feldern laufen die Feldlinien nicht parallel, siehe Bild EG71D.

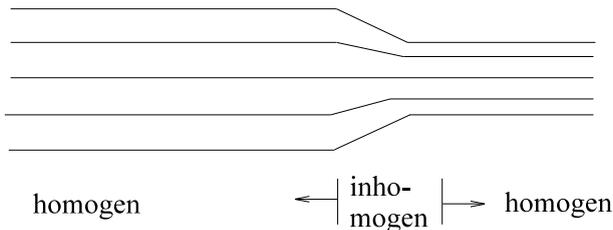


Bild EG71D

Stationäre Felder sind Felder, die zeitunabhängig sind (eingeschwungener Zustand).

Instationäre Felder sind zeitabhängig.

Wirbelfreie Felder

$$\text{rot}(\vec{v}) = 0$$

Felder mit Wirbeln

$$\text{rot}(\vec{v}) \neq 0$$

Potentialfelder sind wirbelfrei

Quellenfreie Felder

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

Felder mit Quellen

$$\text{div}(\vec{v}) \neq 0$$

Umrechnung von Vektor in Skalar-Feld

Wenn ein Feld wirbel- und quellenfrei ist, kann ein Vektorfeld (z.B. \vec{v}) auch durch eine Skalarfunktion beschrieben werden:

$$\vec{v} = \text{grad}\varphi[(x, y, z)]$$

$$\vec{v} \rightarrow \varphi(x, y, z)$$

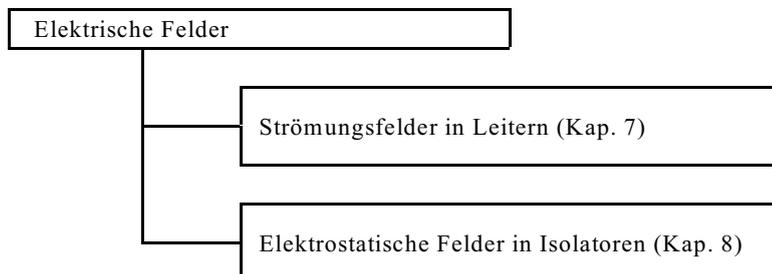
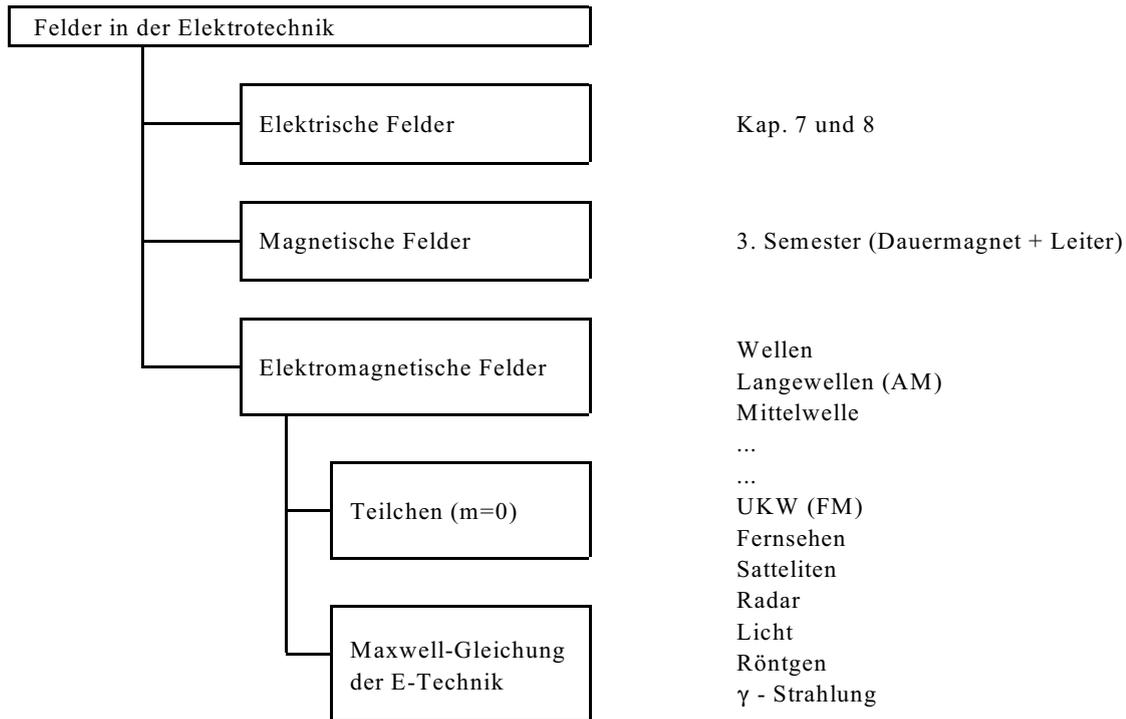
$$\varphi_2(x_2, y_2, z_2) - \varphi_1(x_1, y_1, z_1) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{v}(x, y, z) \, d\vec{s}$$

Felder in angepassten Koordinaten

- Kartesische Koordinaten
- Zylinder Koordinaten
- Kugel Koordinaten

Wichtig: Feldgröße ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, wohl aber die Komponenten in Richtung der Einheitsvektoren.

7.2. Feldarten in der Elektrotechnik



7.3. Stromdichte und Strom

Wiederholung: Aus dem ersten Semester ist der Zusammenhang zwischen Stromdichte und Strom mit Hilfe der Fläche A bekannt, siehe Bild EG73A.

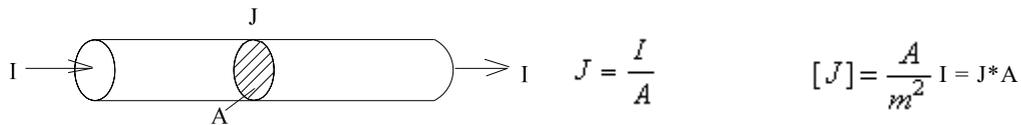


Bild EG73A

Der obere Zusammenhang ist einfach und gilt nur für den Fall, dass die Fläche senkrecht zur Stromrichtung vorhanden ist. Die Stromdichte ist eine gerichtete physikalische Größe, also ein Vektor. Der Strom ist eine skalare Summengröße. Wie erhält man aus dem Vektor \vec{J} mit Hilfe der Fläche den Skalar I? Ist nun die Fläche ein Vektor oder ein Skalar? Die Fläche hat im Raum eine Ausrichtung, ist also auch ein Vektor. Welche Richtung hat nun der Flächenvektor? Dazu siehe Bild EG73B.

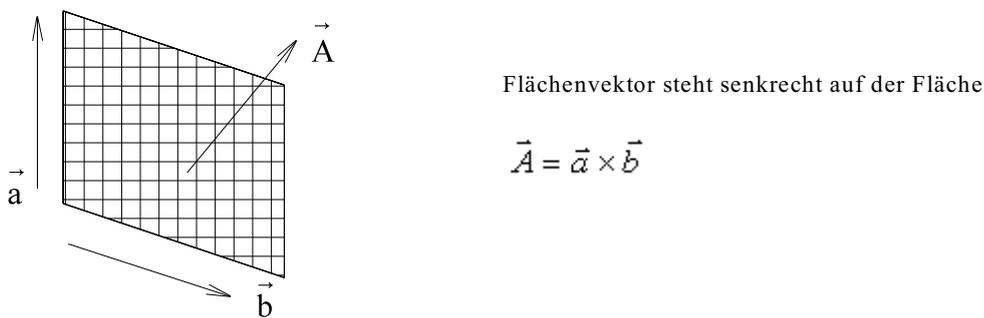


Bild EG73B

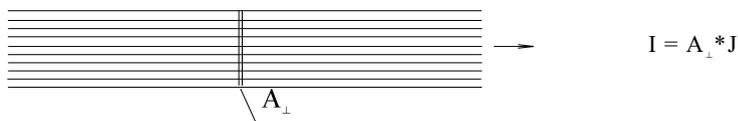


Bild EG73C

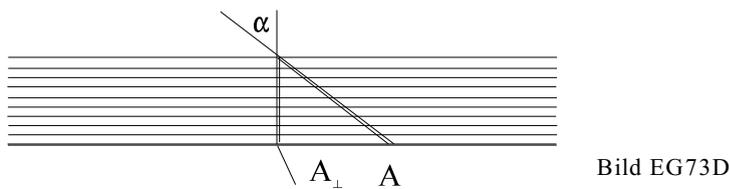


Bild EG73D

$$A_{\perp} = A \cdot \cos(\alpha)$$

$$I = A_{\perp} \cdot J = J \cdot A \cdot \cos(\alpha) = J \cdot A \cdot \cos(\angle \vec{J}, \vec{A})$$

$$A = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

$$I = \vec{J} \cdot \vec{A} \quad \text{homogene Felder}$$

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad \text{inhomogene Felder}$$

$$I = \int dI$$

$$I = \int_{(A)} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Beispiel:

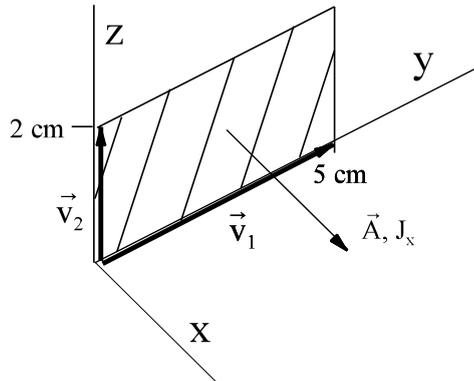
Gegeben ist die Stromdichte

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} \frac{mA}{cm^2}$$

Bestimmen Sie den Strom durch die Fläche, die durch folgende Punkte aufgespannt wird:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ y_1 = 0 & y_2 = 5 \text{ cm} \\ z_1 = 0 & z_2 = 2 \text{ cm} \end{array}$$

Skizze:

**Lösungsweg:**

a) mathematische Lösung:

aus Skizze:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \text{ cm} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \text{ cm} \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \vec{e}_x \\ 5 \text{ cm} & 0 & \vec{e}_y \\ 0 & 2 \text{ cm} & \vec{e}_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \text{ cm}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \vec{J} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \text{ cm}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} \frac{mA}{cm^2} = 200 \text{ mA}$$

b) Vereinfachte Lösung:

Strom durch gesuchte Fläche entspricht nach Skizze den Strom in x-Richtung.

$$J_x = 20 \frac{mA}{cm^2}$$

$$A_x = 5 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 10 \text{ cm}^2$$

$$I = J_x \cdot A_x = 20 \frac{mA}{cm^2} \cdot 10 \text{ cm}^2 = 200 \text{ mA}$$

Aufgabe 7.3.A:

Gegeben ist die Stromdichte

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \frac{A}{cm^2}$$

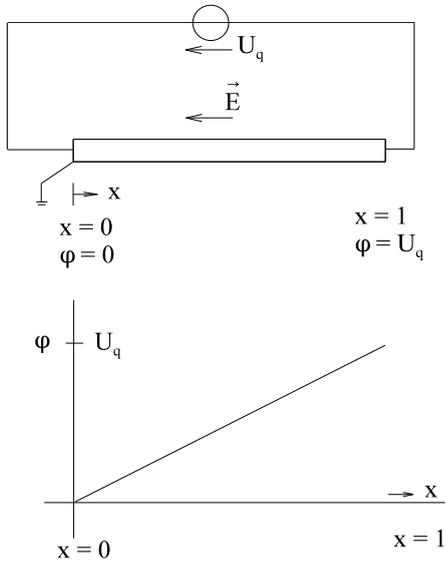
Bestimmen Sie den Strom durch die Fläche, die durch folgende Punkte aufgespannt wird:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1 \text{ cm} & x_2 = 4 \text{ cm} \\ y_1 = 3 \text{ cm} & y_2 = 8 \text{ cm} \\ z_1 = 2 \text{ cm} & z_2 = 2 \text{ cm} \end{array}$$

7.4. Potential und Feldstärke

Der Zusammenhang zwischen Potential und Feldstärke ist am einfachstem an einem homogenen (gleicher Querschnitt) Widerstandsdraht zu erklären, der an einer Spannungsquelle angeschlossen ist.

A) Eindimensional (Draht in x-Richtung)



$$\varphi = U_q \cdot \frac{x}{1} = \frac{U_q}{1} \cdot x$$

Bild EG74A

E-Feldstärke = $\frac{\text{Spannung}}{\text{Länge}}$

$$[E] = \frac{V}{m} \quad E = \frac{U_q}{l} \quad E_x = -\frac{U_q}{l}$$

Elektrische Feldstärke zeigt vom Punkt hoher Spannung (hohem Potential) zum Punkt niedriger Spannung (Potential). Feldstärke und Strom zeigen in die gleiche Richtung

$$\varphi = \frac{U_q}{l} \cdot x = -E_x \cdot x \quad \frac{d\varphi}{dx} = -E_x \quad \varphi = \int d\varphi \quad d\varphi = -E_x dx$$

$$\int_1^2 d\varphi = -\int_1^2 E_x \cdot dx \quad \varphi_2 - \varphi_1 = -E_x \cdot x$$

Eindimensional	
$\frac{d\varphi}{dx} = -E_x$	$\int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = U_{21} = -\int_1^2 E_x \cdot dx$

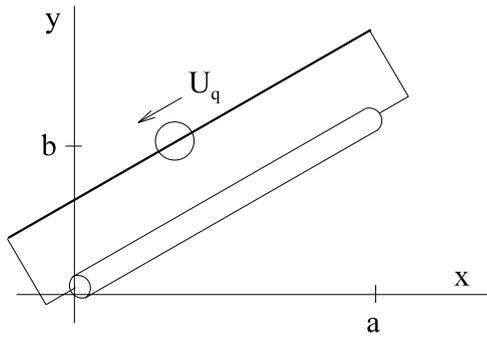
B] Zweidimensional

Bild EG74C

$$\varphi(x) = \frac{U_q}{a} * x$$

$$E_x = -\frac{U_q}{a}$$

$$\varphi(y) = \frac{U_q}{b} * y$$

$$E_y = -\frac{U_q}{b}$$

$$\varphi(x) = -E_x * x$$

$$\varphi(y) = -E_y * y$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -E_y$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$$

Berechnung des Potentials aus der Feldstärke:

eindimensional war es einfach:

$$d\varphi = -E_x dx \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 E_x * dx$$

mehrdimensional:

$$d\varphi = -\vec{E} * d\vec{s}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 \vec{E} * d\vec{s}$$

Beispiel zwecks Herleitung zur Potentialberechnung des zweidimensionalen Potentials aus der Feldstärke

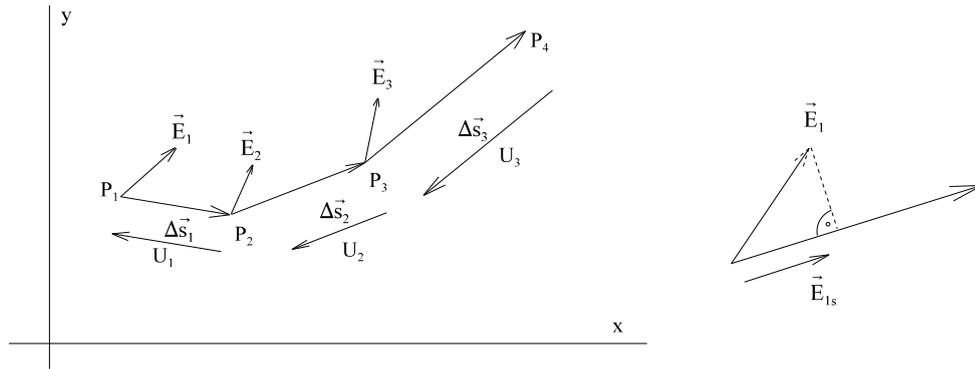


Bild MA7121C

$$U_1 = -\vec{E}_{1s} \cdot \Delta s_1 = -E_1 \cdot \Delta s_1 \cdot \cos(\angle \vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{s}_1) = -\vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{s}_1$$

$$U_{41} = \varphi_4 - \varphi_1 = (U_1 + U_2 + U_3) = -(\vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{s}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{s}_2 + \vec{E}_3 \cdot \Delta \vec{s}_3) = -\sum_{i=1}^3 \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i$$

$$U_{41} = \varphi_4 - \varphi_1 = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Beispiel 1:

Gegeben ist das Potenzial

$$\varphi(x, y, z) = \frac{10V}{cm} \cdot x + \frac{20V}{cm} \cdot y + \frac{30V}{cm} \cdot z$$

Bestimmen Sie die Feldstärke.

Lösungsweg:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} \frac{V}{cm}$$

Beispiel 2:

Gegeben ist das Potenzial

$$\varphi(x, y, z) = \frac{10V}{cm^2} \cdot x \cdot y + \frac{20V}{cm^3} \cdot y \cdot z^2$$

Bestimmen Sie die Feldstärke.

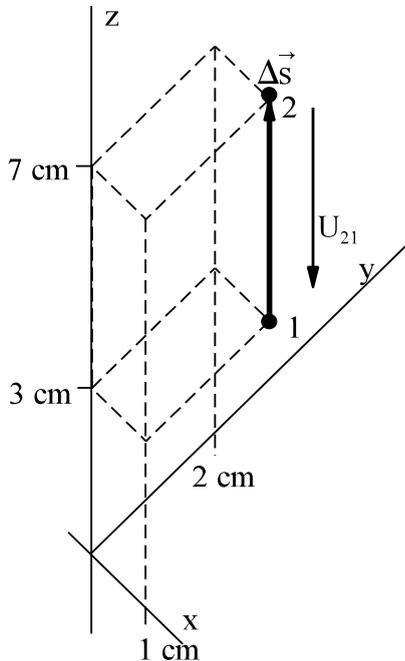
Lösungsweg:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{10V}{cm^2} \cdot y \\ \frac{10V}{cm^2} \cdot x + \frac{20V}{cm^3} \cdot z^2 \\ \frac{40V}{cm^3} \cdot y \cdot z \end{pmatrix}$$

Beispiel 3:

Gegeben sind die Feldstärke und zwei Punkte im Raum

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{V}{cm} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} cm \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} cm$$

Bestimmen Sie die Spannung U_{21} .**Lösungsweg:**

Homogenes Feld, Weg nur in einer Koordinatenrichtung.

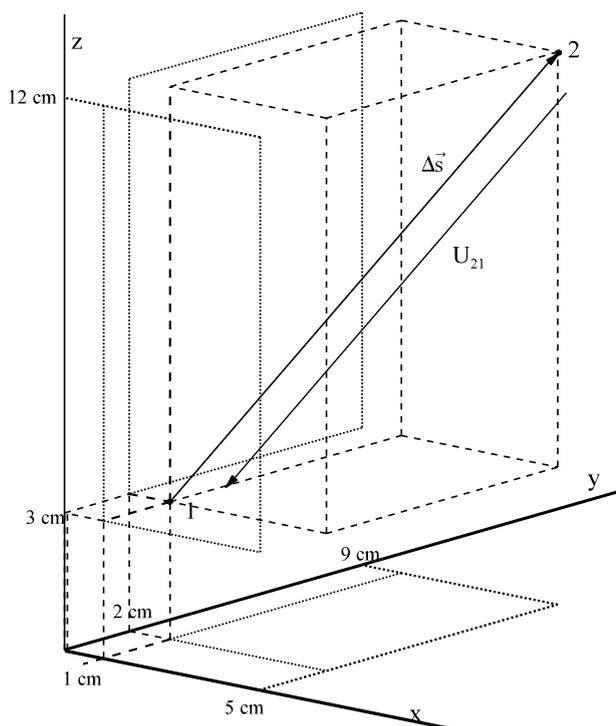
$$\Delta z = 4 \text{ cm} \quad \Delta y = 0 = \Delta x$$

$$U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = -E_z * \Delta z = -4 \frac{V}{cm} * 4 \text{ cm} = -16V$$

Beispiel 4:

Gegeben sind die Feldstärke und zwei Punkte im Raum

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{V}{cm} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} cm \quad P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} cm$$

Bestimmen Sie die Spannung U_{21} .**Lösungsweg:**

homogenes Feld:

$$U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = - \int \vec{E} d\vec{s} = -\vec{E} * \Delta \vec{s}$$

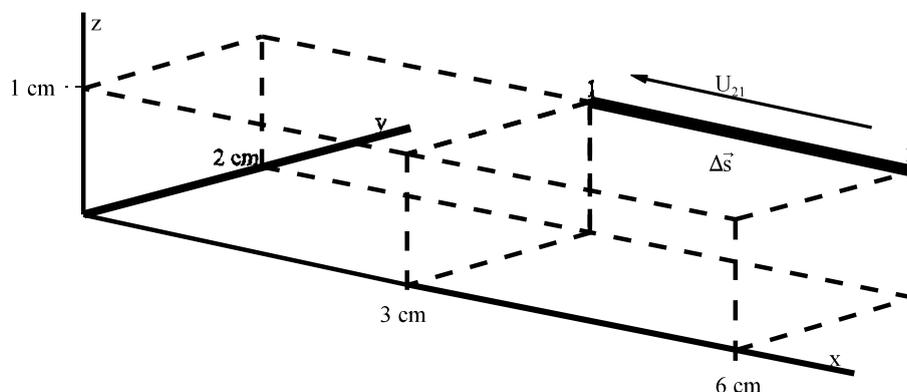
$$\Delta \vec{s} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} cm - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} cm = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} cm$$

$$u_{21} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{V}{cm} * \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} cm = -(8 + 21 + 36)V = -65V$$

Beispiel 5:

Gegeben sind die Feldstärke und zwei Punkte im Raum

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 4x \\ 3y \\ 2z \end{pmatrix} \frac{V}{cm^2} \quad \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} cm \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} cm$$

Bestimmen Sie die Spannung U_{21} .**Lösungsweg:**

$$dz = 0 \quad dy = 0$$

$$U_{21} = - \int_{x=3}^6 E_x dx = - \int_{x=3}^6 4x \frac{V}{cm^2} * dx = - \frac{4}{2} x^2 \frac{V}{cm^2} \Big|_{x=3}^6 = -2 \frac{V}{cm^2} [(6cm)^2 - (3cm)^2] = -54V$$

Aufgabe 7.4.A

Gegeben ist das Potenzial

$$\varphi(x, y, z) = - \frac{20V}{mm} * x + \frac{3V}{mm} * y + \frac{50V}{mm} * z$$

Bestimmen Sie die Feldstärke.

Aufgabe 7.4.B

Gegeben ist das Potenzial

$$\varphi(x, y, z) = \frac{20V}{cm^3} * x * z^2 + \frac{70V}{cm^3} * x * y * z$$

Bestimmen Sie die Feldstärke.

Aufgabe 7.4.C

Gegeben sind die Feldstärke und zwei Punkte im Raum

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \frac{V}{cm} \quad \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} cm \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} cm$$

Bestimmen Sie die Spannung U_{21} .**Aufgabe 7.4.D**

Gegeben sind die Feldstärke und zwei Punkte im Raum

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \frac{V}{cm} \quad \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} cm \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} cm$$

Bestimmen Sie die Spannung U_{21} .**Aufgabe 7.4.E**

Gegeben sind die Feldstärke und zwei Punkte im Raum

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 4zy \\ 4zx \\ 4xy \end{pmatrix} \frac{V}{cm^3} \quad \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} cm \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} cm$$

Bestimmen Sie die Spannung U_{21} .

7.5. Ursache der elektrischen Strömung in Leitern

Die Kraft auf eine Ladung im elektrischen Feld wird zwar erst in Kap. 8 erläutert:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad \text{Kraft} = \text{Ladung} \cdot \text{Feldstärke}$$

A) $E = 0 \Rightarrow$ keine geordnete Bewegung der Ladungsträger nach Bild EG75A

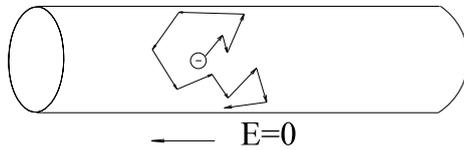


Bild EG75A

B) $E \neq 0 \Rightarrow$ geordnete Bewegung überlagert sich der unregelmäßigen

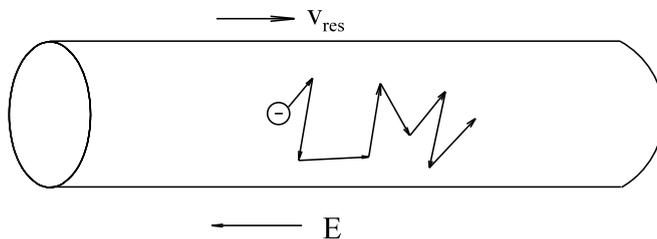


Bild EG75B

Spannung \rightarrow Feldstärke \rightarrow Stromdichte \rightarrow Strom

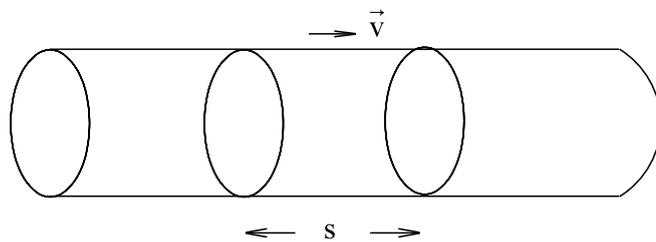


Bild EG75C

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}[n \cdot q \cdot V] = \frac{d}{dt}[n \cdot q \cdot A \cdot s]$$

$$n - \text{Ladungsträgerdichte} \quad [n] = \frac{1}{\text{m}^3}$$

$$q - \text{Elementarladung} \quad q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

$$I = n \cdot q \cdot A \cdot \frac{ds}{dt} = n \cdot q \cdot A \cdot v_{\text{res}}$$

$$\frac{I}{A} = J = n \cdot q \cdot v_{\text{res}}$$

$$\text{Ansatz: } v_{\text{res}} = b \cdot E$$

b - Beweglichkeit der Ladungsträger

$$[b] = \frac{[v]}{[E]} = \frac{\text{m/s}}{\text{V/m}} = \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

$$J = n \cdot q \cdot b \cdot E$$

$$\vec{J} = n \cdot q \cdot b \cdot \vec{E}$$

7.6. Ohmsches Gesetz in Elementarform

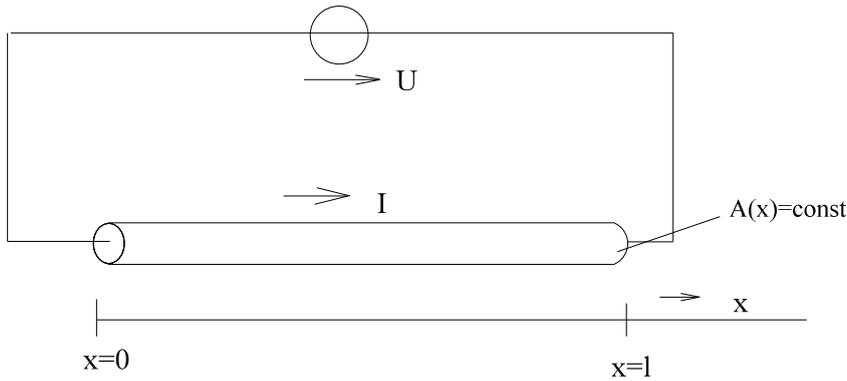


Bild EG76A

$$R = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{A} \qquad I = \frac{U}{R}$$

$$I = \frac{U}{\frac{l}{\kappa \cdot A}} = \kappa \cdot A \cdot \frac{U}{l}$$

$$\frac{I}{A} = \kappa \cdot \frac{U}{l} \qquad \frac{I}{A} = J \cdot \frac{U}{l} = E$$

$$J = \kappa \cdot E$$

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$

Ohmsches Gesetz in Elementarform

Vergleich mit Kap. 7.5:

$$\vec{J} = n \cdot q \cdot b \cdot \vec{E}$$

$$\kappa = n \cdot q \cdot b$$

Beispiel 1: (Klausur EG2, 03.07.1999, SS 1999, Aufgabe 5)

In einem elektrischen Strömungsfeld eines Leiters mit der elektrischen Leitfähigkeit $\kappa = 20 \text{ S/m}$ beträgt das elektrische Potential:

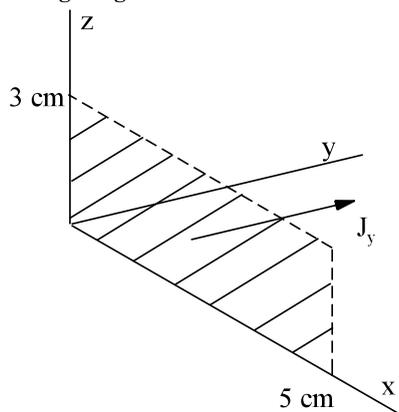
$$\varphi = 100 \text{ V} \left[\frac{x}{3 \text{ cm}} + \frac{y}{4 \text{ cm}} + \frac{z}{7 \text{ cm}} \right]$$

Berechnen Sie den Strom I durch die Fläche (liegt in der x-z-Ebene) mit den folgenden Begrenzungen:

$$y_1 = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad z_1 = 0$$

$$y_2 = 0 \qquad x_2 = 5 \text{ cm} \qquad z_2 = 3 \text{ cm}$$

Lösungsweg:



$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{100 \text{ V}}{3 \text{ cm}} \\ \frac{100 \text{ V}}{4 \text{ cm}} \\ \frac{100 \text{ V}}{7 \text{ cm}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} = 20 \frac{\text{A}}{\text{Vm}} \begin{pmatrix} -\frac{100 \text{ V}}{3 \text{ cm}} \\ \frac{100 \text{ V}}{4 \text{ cm}} \\ -\frac{100 \text{ V}}{7 \text{ cm}} \end{pmatrix} = -0.2 \frac{\text{A}}{\text{Vcm}} \begin{pmatrix} \frac{100 \text{ V}}{3 \text{ cm}} \\ \frac{100 \text{ V}}{4 \text{ cm}} \\ \frac{100 \text{ V}}{7 \text{ cm}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.33 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2} \\ -5 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2} \\ -2.86 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2} \end{pmatrix}$$

$$J_y = -5 \frac{A}{cm^2}$$

$$A_y = 3 \text{ cm} * 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$$

$$I_y = J_y * A_y = -5 \frac{A}{cm^2} * 15 \text{ cm}^2 = -75 A$$

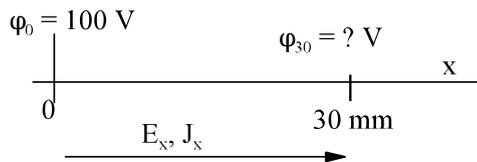
Beispiel 2: (Klausur EG2, 05.07.2001, SS 2001, Aufgabe 1)

In einem elektrischen Strömungsfeld ist nur eine x-Abhängigkeit des Potentials vorhanden. Im Leiter ist eine konstante Stromdichte in x-Richtung von $J_x = 10 \text{ A/mm}^2$ vorhanden. Der Leiter weist einen x abhängigen spezifischen Widerstand von

$$\rho(x) = 4 \frac{\Omega \text{ mm}}{cm} \left(\frac{x}{1 \text{ cm}} \right)$$

auf. Bei $x = 0$ beträgt das Potential $\varphi_0 = 100 \text{ V}$. Berechnen Sie das Potential φ_{30} bei $x = 30 \text{ mm}$.

Lösungsweg:



$$J_x = \kappa * E_x = \frac{E_x}{\rho}$$

$$E_x = \rho(x) * J_x = 4 \frac{V \text{ mm}}{A} * \frac{x}{10 \text{ mm}} * 10 \frac{A}{\text{mm}^2} = 4 \frac{V}{\text{mm}^2} * x$$

$$d\varphi = -E_x dx$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_{30}} d\varphi = - \int_{x=0}^{30 \text{ mm}} 4 \frac{V}{\text{mm}^2} * x * dx = -2 \frac{V}{\text{mm}^2} * x^2 \Big|_{x=0}^{30 \text{ mm}}$$

$$\varphi_{30} - \varphi_0 = -2 \frac{V}{\text{mm}^2} \left[(30 \text{ mm})^2 - 0^2 \right]$$

$$\varphi_{30} = \varphi_0 - 1800 \text{ V} = 100 \text{ V} - 1800 \text{ V} = -1700 \text{ V}$$

Aufgabe 7.6.A:

In einem elektrischen Strömungsfeld eines Leiters mit der elektrischen Leitfähigkeit $\kappa = 20 \text{ S/m}$ beträgt das elektrische Potential:

$$\varphi = 24 \text{ V} \left[\frac{x}{4 \text{ cm}} + \frac{y}{6 \text{ cm}} + \frac{z}{8 \text{ cm}} \right]$$

Berechnen Sie den Strom I durch die Fläche (liegt in der x-z-Ebene) mit den folgenden Begrenzungen:

$x_1 = 1 \text{ cm}$	$y_1 = 3 \text{ cm}$	$z_1 = 6 \text{ cm}$
$x_2 = 1 \text{ cm}$	$y_2 = 5 \text{ cm}$	$z_2 = 11 \text{ cm}$

Aufgabe 7.6.B:

In einem elektrischen Strömungsfeld ist nur eine x-Abhängigkeit des Potentials vorhanden. Im Leiter ist eine konstante Stromdichte in x-Richtung von $J_x = 0.4 \text{ A/mm}^2$ vorhanden. Der Leiter weist einen x abhängigen spezifischen Widerstand von

$$\rho(x) = 2 \frac{\Omega \text{ mm}}{cm} * \left(\frac{x + 3 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} \right)$$

auf. Bei $x = 2 \text{ cm}$ beträgt das Potential $\varphi_{20} = 10 \text{ V}$. Berechnen Sie das Potential φ_{40} bei $x = 40 \text{ mm}$.

7.7. Leistungsdichte im Strömungsfeld

homogen: $P = U \cdot I = \frac{U}{l} \cdot \frac{I}{A} \cdot A \cdot l$

$$P = E \cdot J \cdot A \quad V = l \cdot A$$

$$P = E \cdot J \cdot V \quad \text{homogen, gesamt}$$

$$dP = \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot dV \quad \text{homogen, differentiell}$$

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \quad \vec{J} \cdot \vec{E} = \kappa \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} = \kappa \cdot E^2$$

$$dP = \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot dV = \kappa \cdot E^2 \cdot dV = \frac{J^2}{\kappa} \cdot dV$$

$$P = \int_{(V)} \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot dV = \kappa \cdot \int_{(V)} E^2 \cdot dV = \frac{1}{\kappa} \int_{(V)} J^2 \cdot dV$$

Beispiel 1:

In einem Teil-Volumen eines Leiters mit der spezifischen Leitfähigkeit $\kappa = 25 \text{ S/m}$ und den Begrenzungen

$$x_1 = 2 \text{ cm} \quad y_1 = 3 \text{ cm} \quad z_1 = 4 \text{ cm}$$

$$x_2 = 8 \text{ cm} \quad y_2 = 15 \text{ cm} \quad z_2 = 9 \text{ cm}$$

herrscht ein Potenzial von

$$\varphi(x, y, z) = 20 \frac{V}{mm} \cdot x + 60 \frac{V}{mm} \cdot y - 30 \frac{V}{mm} \cdot z$$

Bestimmen Sie die Verlustleistung im Volumen.

Lösungsweg:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 20 \frac{V}{mm} \\ 60 \frac{V}{mm} \\ -30 \frac{V}{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \frac{V}{cm} \\ -600 \frac{V}{cm} \\ 300 \frac{V}{cm} \end{pmatrix}$$

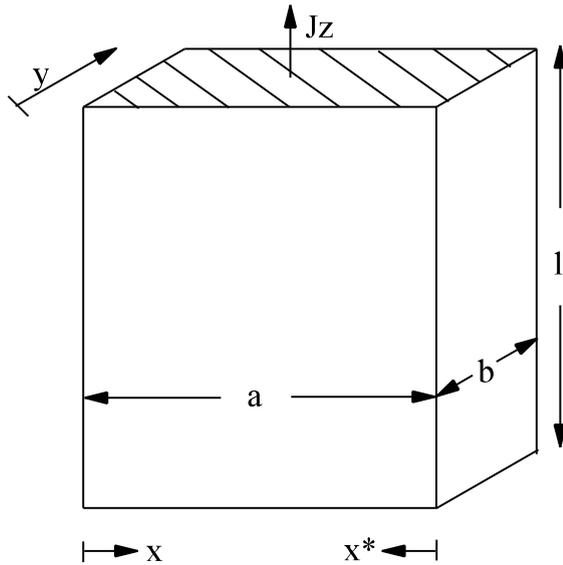
$$E = |\vec{E}| = \sqrt{\left(-200 \frac{V}{cm}\right)^2 + \left(-600 \frac{V}{cm}\right)^2 + \left(300 \frac{V}{cm}\right)^2} = 700 \frac{V}{cm}$$

homogenes Feld $\int dV = V$

$$V = (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) \cdot (z_2 - z_1) = 6 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 360 \text{ cm}^3$$

$$P = \int \kappa \cdot E^2 \cdot dV = \kappa \cdot E^2 \cdot V = 25 \frac{A}{V \cdot 100 \text{ cm}} \cdot \left(700 \frac{V}{cm}\right)^2 \cdot 360 \text{ cm}^3 = 44.1 \cdot 10^6 \text{ W} = 44.1 \text{ MW}$$

Beispiel 2:



Bei einer Cu-Stromschiene ($\kappa = 50 \cdot 10^6 \text{ S/m}$) der Länge $l = 0.5 \text{ m}$, der Breite $a = 100 \text{ mm}$ und der Tiefe $b = 5 \text{ mm}$ fließt der Strom in z-Richtung. Weil die Tiefe b relativ klein ist herrscht nur Stromverdrängung in x-Richtung (Herleitung 3.Semester). Die Stromdichte wird näherungsweise beschrieben durch:

$$\underline{J}_z = 10 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} * e^{-\frac{1+j}{10\text{mm}} * x}$$

$$\text{bzw. } \underline{J}_z = 10 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} * e^{-\frac{1+j}{10\text{mm}} * x^*}$$

Nach obiger Formel wird der Strom in zwei Randbereiche verdrängt.

- Berechnen Sie die Spannung \underline{U} bei $x = 0$ bzw. $x^* = 0$.
- Berechnen Sie den Strom \underline{I} des Leiters.
- Bestimmen Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$.
- Bestimmen Sie die gesamten Verluste P des Leiters.
- Ermitteln Sie den ohmschen Widerstand des Leiters aus $P = I^2 * R$.
- Berechnen Sie die effektive Fläche A aus $R = l/(\kappa * A)$.

Hinweis: Der Wert e^{-5} kann als Null angesehen werden.

Lösungsweg:

- a) Berechnen Sie die Spannung \underline{U} bei $x = 0$ bzw. $x^* = 0$.

$$\underline{J}_z(x=0) = 10 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

$$\underline{E}_z(x=0) = \frac{\underline{J}_z(x=0)}{\kappa} = \frac{10 * 10^6 \text{ A/m}^2}{50 * 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}} = 0.2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\underline{U} = \underline{E}_z * l = 0.2 \frac{\text{V}}{\text{m}} * 0.5\text{m} = 0.1\text{V}$$

- b) Berechnen Sie den Strom \underline{I} des Leiters.

$$\underline{I} = \int \underline{J}_z * dA \quad dA = b * dx$$

$$\underline{I} = 2 \int_{x=0}^{\infty} 10 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} * e^{-\frac{1+j}{10\text{mm}} * x} * b * dx = -20 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} * b * \frac{10\text{mm}}{1+j} * e^{-\frac{1+j}{10\text{mm}} * x} \Bigg|_{x=0}^{\infty}$$

$$\underline{I} = 20 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} * b * \frac{10\text{mm}}{1+j} = 20 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} * 5\text{mm} * \frac{10\text{mm}}{1+j} = \frac{1000\text{A}}{1+j} = (500 - j500) \text{A} = 707 \text{A} \angle -45^\circ$$

- c) Bestimmen Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$.

$$\underline{Z} = \underline{U} / \underline{I} = \frac{0.1\text{V}}{\frac{1000\text{A}}{1+j}} = 0.1\text{m}\Omega * (1+j) = R + jX \quad R = 0.1 \text{ m}\Omega \quad X = 0.1 \text{ m}\Omega$$

d) Bestimmen Sie die gesamten Verluste P des Leiters.

$$\underline{E}_z(x) = \frac{J_z(x)}{\kappa} = \frac{10 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-2} \cdot \exp\left[-\frac{1+j}{10\text{mm}} \cdot x\right]}{50 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}} = 0.2 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot e^{-\frac{x}{10\text{mm}}} \cdot e^{-j \frac{x}{10\text{mm}}}$$

$$E_z(x) = |\underline{E}_z(x)| = 0.2 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot e^{-\frac{x}{10\text{mm}}}$$

$$P_V = \int \kappa \cdot E^2 dV$$

$$dV = dx \cdot b \cdot l$$

$$P_V = 2 \int_{x=0}^{\infty} 50 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Vm}} \cdot \left(0.2 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot e^{-\frac{x}{10\text{mm}}}\right)^2 \cdot dx \cdot b \cdot l$$

$$P_V = 2 \cdot b \cdot l \cdot 50 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Vm}} \cdot 0.04 \frac{\text{V}^2}{\text{m}^2} (-5\text{mm}) \cdot e^{-\frac{2x}{10\text{mm}}} \Big|_{x=0}^{\infty}$$

$$P_V = 2 \cdot 0.005\text{m} \cdot 0.5\text{m} \cdot 50 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Vm}} \cdot 0.04 \frac{\text{V}^2}{\text{m}^2} \cdot (-0.005\text{m}) \cdot (0 - 1) = 50\text{W}$$

e) Ermitteln Sie den ohmschen Widerstand des Leiters aus $P = I^2 \cdot R$.

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{50\text{VA}}{(707\text{A})^2} = 0.1\text{m}\Omega$$

f) Berechnen Sie die effektive Fläche A aus $R = l/(\kappa \cdot A)$.

$$A = \frac{l}{\kappa \cdot R} = \frac{0.5\text{m}}{50 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Vm}} \cdot 0.1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 0.0001\text{m}^2 = 100\text{mm}^2$$

$$A = 2 \cdot b \cdot 10\text{mm} = 2 \cdot 5\text{mm} \cdot 10\text{mm}$$

10 mm $\hat{=}$ Eindringtiefe

Aufgabe 7.7A:

In einem Teil-Volumen eines Leiters mit der spezifischen Leitfähigkeit $\kappa = 25 \text{ S/m}$ und den Begrenzungen

$$x_1 = 1 \text{ cm}$$

$$y_1 = 5 \text{ cm}$$

$$z_1 = 7 \text{ cm}$$

$$x_2 = 4 \text{ cm}$$

$$y_2 = 15 \text{ cm}$$

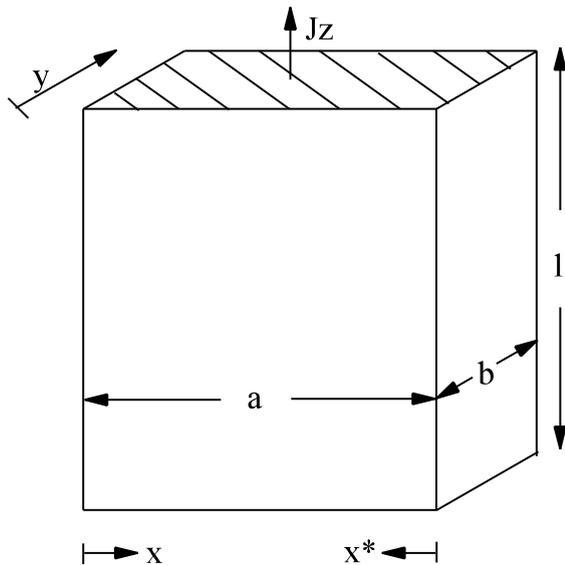
$$z_2 = 11 \text{ cm}$$

herrscht ein Potenzial von

$$\varphi(x, y, z) = 1 \frac{\text{V}}{\text{mm}} \cdot x + 4 \frac{\text{V}}{\text{mm}} \cdot y - 8 \frac{\text{V}}{\text{mm}} \cdot z$$

Bestimmen Sie die Verlustleistung im Volumen.

Aufgabe 7.7B:



Bei einer Cu-Stromschiene ($\kappa = 50 \cdot 10^6 \text{ S/m}$) der Länge $l = 2.5 \text{ m}$, der Breite $a = 160 \text{ mm}$ und der Tiefe $b = 4 \text{ mm}$ fließt der Strom in z-Richtung. Weil die Tiefe b relativ klein ist herrscht nur Stromverdrängung in x-Richtung (Herleitung 3.Semester). Die Stromdichte wird näherungsweise beschrieben durch:

$$\underline{J}_z = 5 \frac{A}{\text{mm}^2} * e^{-\frac{1+j}{10 \text{ mm}} * x}$$

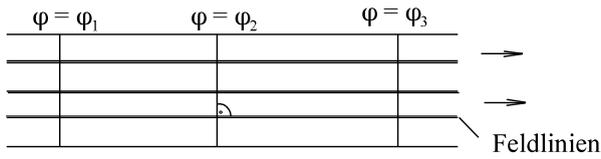
$$\text{bzw. } \underline{J}_z = 5 \frac{A}{\text{mm}^2} * e^{-\frac{1+j}{10 \text{ mm}} * x^*}$$

Nach obiger Formel wird der Strom in zwei Randbereiche verdrängt.

- Berechnen Sie die Spannung \underline{U} bei $x = 0$ bzw. $x^* = 0$.
- Berechnen Sie den Strom \underline{I} des Leiters.
- Bestimmen Sie den komplexen Widerstand $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$.
- Bestimmen Sie die gesamten Verluste P des Leiters.
- Ermitteln Sie den ohmschen Widerstand des Leiters aus $P = I^2 * R$.
- Berechnen Sie die effektive Fläche A aus $R = l/(\kappa * A)$.

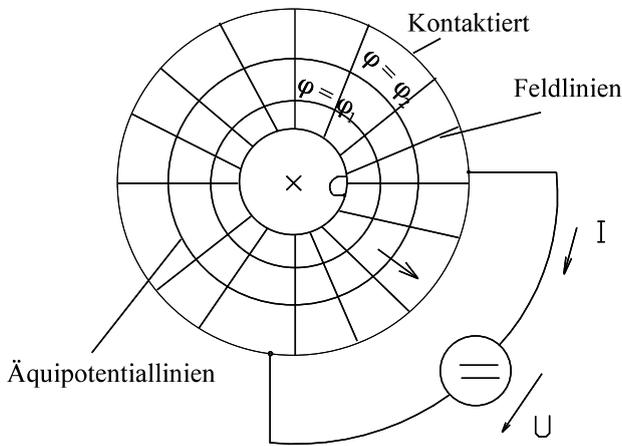
Hinweis: Der Wert e^{-8} kann als Null angesehen werden.

7.8. Feldlinien und Äquipotentiallinien



$\varphi = \varphi_1 = \text{const}$
 $\varphi = \varphi_2 = \text{const}$
 $\varphi = \varphi_3 = \text{const}$

Bild EG78A



Kontaktiert $\kappa \rightarrow \infty$
 Äquipotentiallinien
 $\varphi = \text{const}$

Bild EG78B

Äquipotentiallinien stehen immer senkrecht zu den Feldlinien, weil keine Strömung in Richtung gleichen Potentials erfolgt.

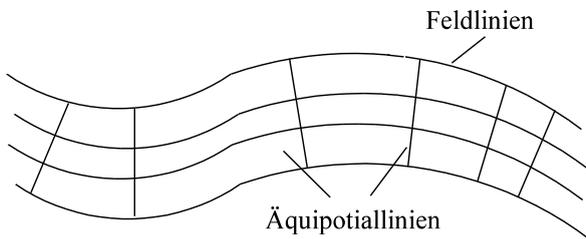


Bild EG78C

Verlauf guter Leiter - schlechter Leiter

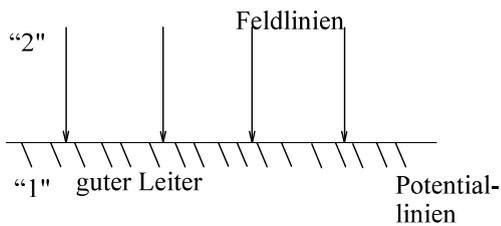


Bild EG78D

Verlauf Grenzschicht Leiter-Nichtleiter

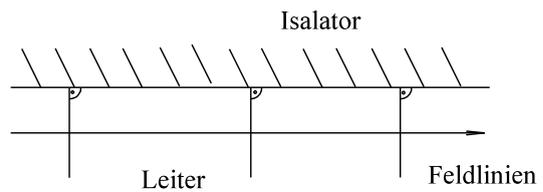
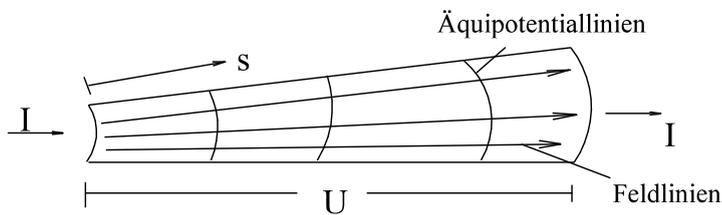


Bild EG78E
 $E_1 \approx 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}$ weil $\kappa_1 \gg \kappa_2$

7.9. Berechnung des elektrischen Widerstandes

7.9.1. Analytische Methode

Voraussetzung: Aus geometrischen Überlegungen (u.a. Symmetriebedingungen) ist der Verlauf der Strombahnen (Feldlinien) und damit der vom Strom durchflossenen Querschnittsfläche (senkrecht zum Strom, Potentiallinien) bekannt.



$$R = \rho * \frac{l}{A}$$

$$dR = \rho * \frac{ds}{A(s)}$$

$$R = \rho \int \frac{1}{A(s)} * ds$$

Bild EG791A

7.9.2. Grafische Methode

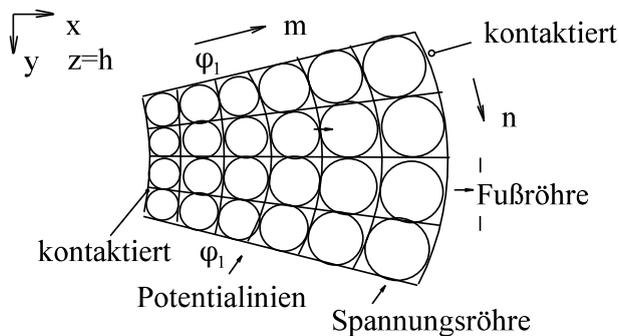


Bild EG792A

Der elektrische Widerstand der Anordnung nach Bild EG792A soll bestimmt werden. Die Anordnung hat aus der Blattebene heraus die Höhe $z = h$. Die Anordnung wird in lauter kleine Quadrate eingeteilt. Danach ergeben sich Potential und Feldlinien. Für das obere Beispiel ergeben sich:

$n = 4$ Flussröhren
 $m = 6$ Spannungsröhren

Der Widerstand R' eines Teilquadrates der oberen Anordnung mit der Seitenlänge a wird berechnet:

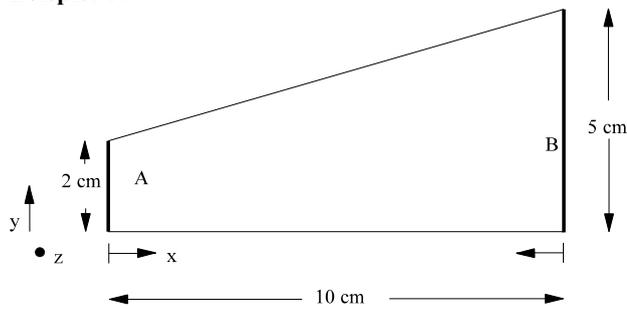
$$R' = \rho * \frac{l}{A} \quad l = a \quad A = a * h$$

$$R' = \rho * \frac{a}{a * h} = \frac{\rho}{h}$$

Bei der oberen Anordnung sind m Widerstände R' in Reihe geschaltet und n Widerstände R' parallel. Damit kann der Gesamtwiderstand R bestimmt werden:

n - Widerstände R' parallel
 m - Widerstände R' in Reihe

$$R_{\text{ges}} = R = R' * \frac{m}{n} \quad R = \rho * \frac{m}{n} * \frac{1}{h}$$

Beispiel 1:

Bei der oberen Anordnung ist der Widerstand R zwischen den Kontakten A und B abzuschätzen. Weitere gegebene Daten:

$$\kappa = 20 \text{ A / (Vm)} \quad \text{Leitfähigkeit}$$

$$h = 0.5 \text{ cm} \quad \text{Tiefe der Anordnung}$$

Lösungsweg:

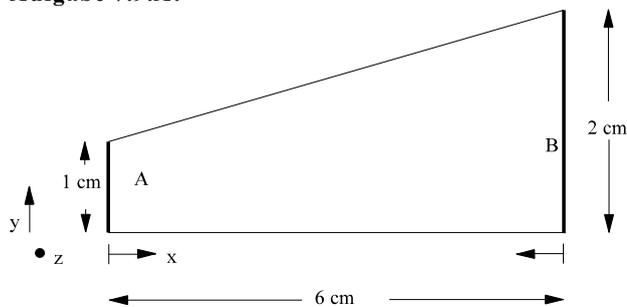
Abschätzung der Fläche

$$A(x) = h * y(x) = 0.5 \text{ cm} * \left(2 \text{ cm} + \frac{x}{10 \text{ cm}} * 3 \text{ cm} \right) = 1 \text{ cm}^2 + 0.15 \text{ cm} * x$$

$$\kappa = 20 \frac{\text{A}}{\text{Vm}} = 20 \frac{\text{A}}{\text{V} * 100 \text{ cm}} = 0.2 \frac{\text{A}}{\text{Vcm}} \quad \rho = 5 \frac{\text{Vcm}}{\text{A}}$$

$$R = \rho \int_{x=0}^{10 \text{ cm}} \frac{dx}{A(x)} = 5 \frac{\text{Vcm}}{\text{A}} \int_{x=0}^{10 \text{ cm}} \frac{dx}{1 \text{ cm}^2 + 0.15 \text{ cm} * x} = \frac{5 \frac{\text{Vcm}}{\text{A}}}{0.15 \text{ cm}} \int_{x=0}^{10 \text{ cm}} \frac{dx}{x + \frac{1 \text{ cm}^2}{0.15 \text{ cm}}}$$

$$R = 33.33 \Omega * \ln(x + 6.666 \text{ cm}) \Big|_{x=0}^{10 \text{ cm}} = 33.33 \Omega * \ln\left(\frac{10 \text{ cm} + 6.666 \text{ cm}}{6.666 \text{ cm}}\right) = 30.5 \Omega$$

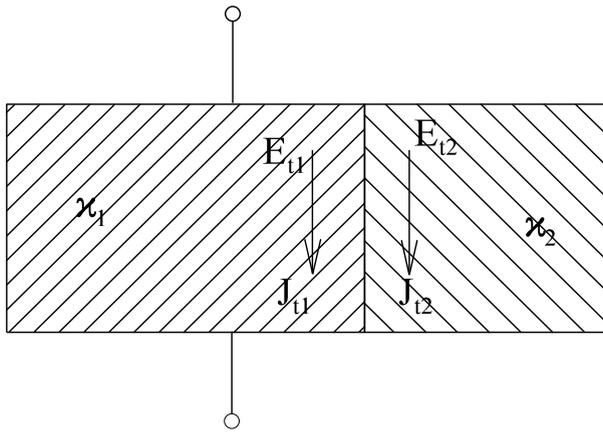
Aufgabe 7.9.A:

Bei der oberen Anordnung ist der Widerstand R zwischen den Kontakten A und B abzuschätzen. Weitere gegebene Daten:

$$\kappa = 20 \text{ A / (Vm)} \quad \text{Leitfähigkeit}$$

$$h = 0.5 \text{ cm} \quad \text{Tiefe der Anordnung}$$

7.10. Verhalten an Grenzflächen

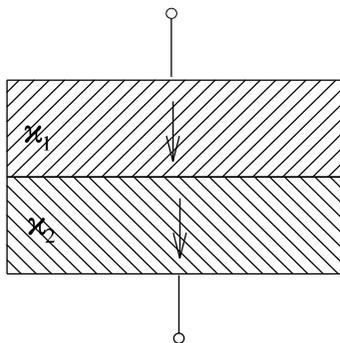


$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$\frac{J_{t1}}{\kappa_1} = \frac{J_{t2}}{\kappa_2}$$

$$\frac{J_{t1}}{J_{t2}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

Bild EG710A



$$J_{n1} = J_{n2}$$

$$\kappa_1 * E_{n1} = \kappa_2 * E_{n2}$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

Bild EG710B

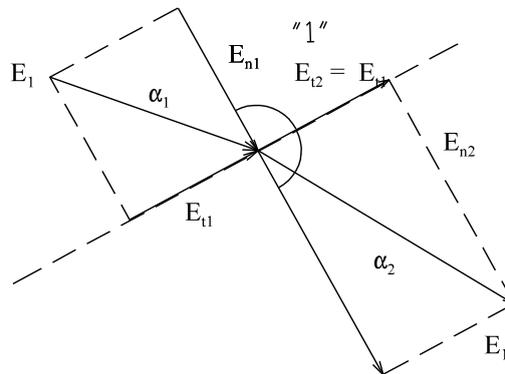
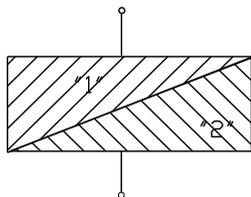


Bild EG710C

$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

$$\tan(\alpha_1) = \frac{E_{t1}}{E_{n1}}$$

$$\tan(\alpha_2) = \frac{E_{t2}}{E_{n2}}$$

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\frac{E_{t1}}{E_{n1}}}{\frac{E_{t2}}{E_{n2}}} = \frac{E_{t1}}{E_{t2}} * \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = 1 * \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

Beispiel 1

An einer Trennfläche Material 1 nach Material 2 treten im Material 1 mit $\kappa_1 = 100 \text{ A/Vm}$ folgende Feldstärken auf:

$$E_{n1} = 100 \text{ V/cm} \quad - \text{ Normalkomponente}$$

$$E_{t1} = 20 \text{ V/cm} \quad - \text{ Tangentialkomponente}$$

Geben Sie die Feldstärken E_{n2} und E_{t2} im Material 2 mit $\kappa_2 = 20 \text{ A/Vm}$ an.

Lösungsweg:

$$E_{t2} = E_{t1} = 100 \text{ V/cm}$$

$$E_{n2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} * E_{n1} = \frac{100 \text{ A/Vm}}{20 \text{ A/Vm}} * 100 \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 500 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

Beispiel 2

An einer Trennfläche Material 1 nach Material 2 treten im Material 1 mit $\kappa_1 = 56 * 10^6 \text{ A/Vm}$ folgende Stromdichten auf:

$$J_{n1} = 5 \text{ A/mm}^2 \quad - \text{ Normalkomponente}$$

$$J_{t1} = 10 \text{ A/mm}^2 \quad - \text{ Tangentialkomponente}$$

Geben Sie die Stromdichten J_{n2} und J_{t2} im Material 2 mit $\kappa_2 = 28 * 10^6 \text{ A/Vm}$ an.

Lösungsweg:

$$J_{n2} = J_{n1} = 5 \text{ A/mm}^2$$

$$J_{t2} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} * J_{t1} = \frac{28 * 10^6 \text{ A/Vm}}{56 * 10^6 \text{ A/Vm}} * 10 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} = 5 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

Aufgabe 7.10.A

An einer Trennfläche Material 1 nach Material 2 treten im Material 1 mit $\kappa_1 = 200 \text{ A/Vm}$ folgende Feldstärken auf:

$$E_{n1} = 80 \text{ V/mm} \quad - \text{ Normalkomponente}$$

$$E_{t1} = 24 \text{ V/mm} \quad - \text{ Tangentialkomponente}$$

Geben Sie die Feldstärken E_{n2} und E_{t2} im Material 2 mit $\kappa_2 = 800 \text{ A/Vm}$ an.

Aufgabe 7.10.B

An einer Trennfläche Material 1 nach Material 2 treten im Material 1 mit $\kappa_1 = 30 * 10^6 \text{ A/Vm}$ folgende Stromdichten auf:

$$J_{n1} = 8 \text{ A/mm}^2 \quad - \text{ Normalkomponente}$$

$$J_{t1} = 6 \text{ A/mm}^2 \quad - \text{ Tangentialkomponente}$$

Geben Sie die Stromdichten J_{n2} und J_{t2} im Material 2 mit $\kappa_2 = 60 * 10^6 \text{ A/Vm}$ an.

7.11. Abschließende Aufgaben zu Kap. 7**Aufgabe 7.1**

Ein Hohlzylinder aus mäßig leitendem Material ($\rho = 0.02 \Omega\text{m}$) der Höhe $h = 1 \text{ cm}$, dem Innenradius $r_1 = 2 \text{ cm}$ und dem Außenradius $r_2 = 10 \text{ cm}$ wird an der inneren und äußeren Mantelfläche kontaktiert mit gut leitendem Material ($\rho \rightarrow 0$). Angeschlossen wird eine Spannung $U = 10 \text{ V}$ (Pluspol innen)

- Berechnen Sie den Widerstand analytisch.
- Bestimmen Sie den Widerstand grafisch.
- Geben Sie das Vektorfeld von Stromdichte und Feldstärke an.
- Berechnen Sie das skalare Potentialfeld.
- Geben Sie die Leistungsdichte der Wirkleistung an.
- Bestimmen Sie durch Volumen-Integration die gesamte Wirkleistung.
- Wie wäre der Wert unter f) schneller zu berechnen.

Lösungsweg:**gegeben:**

	Hohlzylinder	
$h = 1 \text{ cm}$	$r_1 = 2 \text{ cm}$	$\varphi_1 = 0$
	$r_2 = 10 \text{ cm}$	$\varphi_2 = 10 \text{ V}$

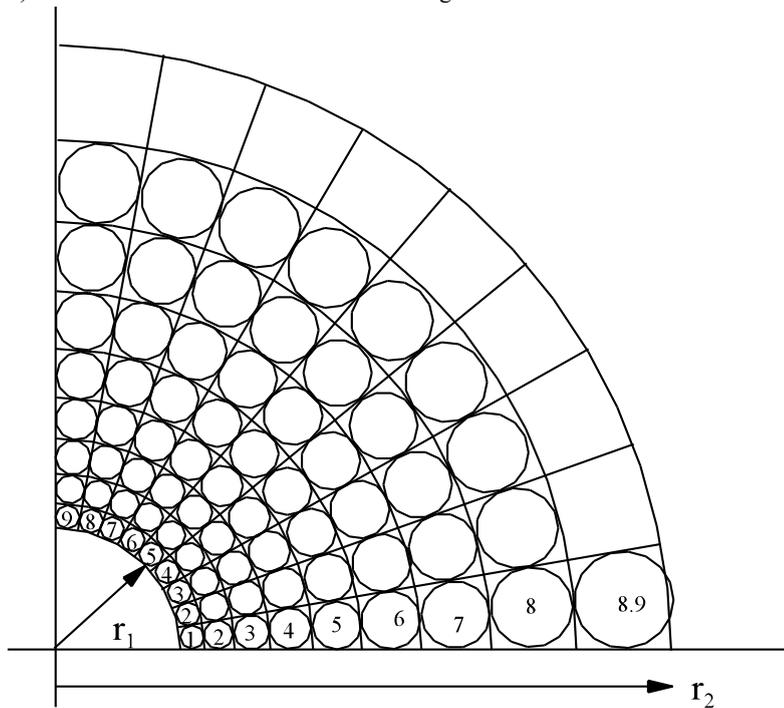
- a) Berechnen Sie den Widerstand analytisch.

$$dR = \frac{dl}{\kappa * A} \quad dl = dr \quad A(r) = 2\pi * r * h$$

$$dR = \frac{dr}{\kappa * 2\pi * r * h}$$

$$R = \int_{r=r_1}^{r_2} dR = \int_{r=2}^{10} \frac{1}{\kappa * 2\pi * h} * \frac{dr}{r} = \rho * \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi * h} = 0.02 \Omega\text{m} * \frac{\ln(10\text{cm}/2\text{cm})}{2\pi * 0.01} = 0.5123 \Omega$$

b) Bestimmen Sie den Widerstand grafisch.



$$R' = \rho * \frac{1}{h}$$

$$R = \frac{8.9}{9 * 4} * R'$$

$$R = \frac{8.9}{9 * 4} * 0.02 \frac{\Omega}{m} * \frac{1}{0.01m} = 0.494 \Omega$$

c) Geben Sie das Vektorfeld von Stromdichte und Feldstärke an.

$$\vec{J} = J_r * \vec{e}_r \quad J_\varphi = 0 \quad J_z = 0$$

$$J_r = \frac{I}{A(r)} = \frac{U/R}{2\pi * r * h} = \frac{10V}{2\pi * 0.5123\Omega * 0.01m} * \frac{1}{r} = 310.7 \frac{A}{m} * \frac{1}{r}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_r * \vec{e}_r \quad E_\varphi = 0 \quad E_z = 0$$

$$E_r = \frac{1}{\kappa} * J_r = \rho * J_r = 0.02 \Omega m * 310.7 \frac{A}{m} * \frac{1}{r} = 6.213 V * \frac{1}{r}$$

d) Berechnen Sie das skalare Potentialfeld.

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{d\varphi}{dr} \quad \text{weil nur eine Abhängigkeit}$$

$$d\varphi = -E_r * dr$$

$$\varphi = \varphi_1 + \int_{r=r_1}^r (-E_r) dr' = 10V - 6.213V \int_{r=r_1}^r \frac{1}{r'} dr' = 10V - 6.213V * \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

e) Geben Sie die Leistungsdichte der Wirkleistung an.

$$\frac{P}{V} = \kappa * E^2 = \rho * J^2 = 0.02 \frac{V}{A} * m * \left(310.7 \frac{A}{m} * \frac{1}{r}\right)^2 = 1931 \frac{W}{m} * \frac{1}{r^2}$$

f) Bestimmen Sie durch Volumen-Integration die gesamte Wirkleistung.

$$P = \int \frac{P}{V} dV \quad dV = A(r) * dr = 2\pi * r * h * dr$$

$$P = \int_{r=r_1}^{\infty} 1931 \frac{W}{m} * \frac{1}{r^2} * h * 2\pi * r * dr = 1931 \frac{W}{m} * 0.01m * 2\pi * \ln\left(\frac{10cm}{2cm}\right) = 195.3W$$

g) Wie wäre der Wert unter f) schneller zu berechnen.

$$P = U^2 / R = (10V)^2 * \frac{1}{0.5123\Omega} = 195.2W$$

Aufgabe 7.2

Über einen im Erdboden verankerten Stahlmast fließt ein Kurzschlussstrom $I_K = 100 \text{ A}$ ins Erdreich mit der Leitfähigkeit $\kappa = 0.01 \text{ S/m}$. Es soll angenommen werden, dass der Mast eine metallische ($\kappa \rightarrow \infty$) Halbkugel von Radius $r_1 = 0.5 \text{ m}$ darstellt.

- Berechnen Sie den Widerstand gegenüber den Erdboden (Halbkugel mit $r_2 = \infty$).
- Bestimmen Sie die Spannung gegenüber dem entfernten Erdreich.
- Geben Sie das Vektorfeld von Stromdichte und Feldstärke an.
- Berechnen Sie das skalare Potentialfeld.
- Geben Sie die Leistungsdichte der Wirkleistung an.
- Bestimmen Sie durch Volumen-Integration die gesamte Wirkleistung.
- Wie wäre der Wert unter f) schneller zu berechnen.

Lösungsweg:

gegeben: $I_K = 100 \text{ A}$ $\kappa = 0.01 \text{ S/m}$ Mast \triangleq Halbkugel $r_1 = 0.5 \text{ m}$

- Berechnen Sie den Widerstand gegenüber den Erdboden (Halbkugel mit $r_2 = \infty$).

$$dR = \frac{dr}{\kappa \cdot A(r)} \quad A(r) = 2\pi \cdot r^2 \quad (\text{Halbkugel})$$

$$dR = \frac{dr}{\kappa \cdot 2\pi \cdot r^2}$$

$$R = \int_{r=r_1}^{\infty} \frac{1}{\kappa \cdot 2\pi} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{\kappa \cdot 2\pi} \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r=r_1}^{\infty} = \frac{1}{\kappa \cdot 2\pi \cdot r_1} = \frac{1}{0.01 \text{ S/m} \cdot 2\pi \cdot 0.5 \text{ m}} = 3183 \Omega$$

- Bestimmen Sie die Spannung gegenüber dem entfernten Erdreich.

$$U = I \cdot R = 100 \text{ A} \cdot 31.83 \Omega = 3.183 \text{ kV}$$

- Geben Sie das Vektorfeld von Stromdichte und Feldstärke an.

$$\vec{J} = J_r \cdot \vec{e}_r \quad J_\varphi = 0 \quad J_\theta = 0$$

$$J_r = \frac{I}{A(r)} = \frac{100 \text{ A}}{2\pi \cdot r^2} = 15.92 \text{ A} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$E_r = \frac{J_r}{\kappa} = \frac{15.92 \text{ A}}{0.01 \text{ S/m}} \cdot \frac{1}{r^2} = 1592 \text{ Vm} \cdot \frac{1}{r^2}$$

- Berechnen Sie das skalare Potentialfeld.

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$$

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{d\varphi}{dr} \quad d\varphi = -E_r \cdot dr$$

$$\varphi = \varphi_1 - \int_{r=r_1}^r E_r dr' = \varphi_1 - 1592 \text{ Vm} \int_{r=r_1}^r \frac{1}{r'^2} dr'$$

$$\varphi = 3183 \text{ V} - 1592 \text{ Vm} \left(\frac{-1}{r} - \frac{-1}{r_1} \right) = 3183 \text{ V} - \frac{1592 \text{ Vm}}{r_1} + 1592 \text{ Vm} \cdot \frac{1}{r} = 1592 \text{ Vm} \cdot \frac{1}{r}$$

- Geben Sie die Leistungsdichte der Wirkleistung an.

$$\frac{P}{V} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \kappa \cdot E^2 = \kappa \cdot (1592 \text{ Vm})^2 \cdot \frac{1}{r^4} = 0.01 \frac{\text{A}}{\text{Vm}} \cdot (1592 \text{ Vm})^2 \cdot \frac{1}{r^4} = 25.34 \text{ kWm} \cdot \frac{1}{r^4}$$

- Bestimmen Sie durch Volumen-Integration die gesamte Wirkleistung.

$$P = \int \frac{P}{V} dV \quad dV = A(r) \cdot dr = 2\pi \cdot r^2 \cdot dr$$

$$P = \int_{r=r_1}^{\infty} 25.34 \text{ kWm} \cdot \frac{1}{r^4} \cdot 2\pi \cdot r^2 \cdot dr = 2\pi \cdot 25.34 \text{ kWm} \int_{r=r_1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot dr$$

$$P = 159.2 \text{ kWm} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r=r_1}^{\infty} = \frac{159.2 \text{ kWm}}{r_1} = \frac{159.2 \text{ kWm}}{0.5} = 318.4 \text{ kW}$$

- Wie wäre der Wert unter f) schneller zu berechnen.

$$P = U \cdot I = 3.183 \text{ kV} \cdot 100 \text{ A} = 318.3 \text{ kW}$$

8. Das elektrostatische Feld	251
8.1. Ursache des elektrostatischen Feldes	251
8.2. Kraft auf eine Ladung	253
8.3. Zusammenwirken zweier Ladungen	254
8.4. Ladungsarten	255
8.5. Verschiebungsfluss und Verschiebungsflussdichte	256
8.6. Zusammenhang zwischen den Vektoren D und E	257
8.7. Der Begriff der Kapazität	263
8.8. Schaltung von Kondensatoren	266
8.9. Berechnung von Kondensatoren	268
8.9.1. Plattenkondensator	268
8.9.2. Analytische Kapazitätsberechnung	268
8.9.3. Konzentrischer Zylinder-Kondensator	268
8.9.4. Konzentrischer Kugelkondensator	269
8.9.5. Wickelkondensator	270
8.9.6. Feld und Kapazität einer Doppelleitung	270
8.9.6.1. Feld einer Einzelleitung	270
8.9.6.2. Feld einer Doppelleitung auf der Verbindungslinie	270
8.9.6.3. Kapazität einer Doppelleitung	271
8.9.6.4. Potential der Doppelleitung	272
8.9.7. Kapazität einer Leitung gegen Erde	273
8.9.8. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 8.9	273
8.10. Kraft zwischen zwei Punktladungen	276
8.11. Influenz, Faradayischer Käfig	277
8.12. Energie des elektrischen Feldes	278
8.13. Entladen eines Kondensators	280
8.14. Verluste im elektrostatischen Feld	281
8.14.1. Isolations-Verluste	281
8.14.2. Dielektrische Verluste	282
8.15. Spannungsverteilung an einer Reihenschaltung	284
8.16. Kraft auf Kondensatorplatten	286
8.17. Verallgemeinert Stromdichte	287
8.18. Ohmsches und Kirchhoffsche Gesetze in Elementarform	289
8.19. Verhalten an Grenzflächen	292
8.20. Abschlussaufgabe zu Kap. 8	294

8. Das elektrostatische Feld

8.1. Ursache des elektrostatischen Feldes

- elektrische Strömungsfeld: anschaulich verständlich
- Elektrostatische Feld: schon abstrakter
- Magnetische Feld: am schwierigsten

Wie sind die meisten der Naturgesetze gefunden worden? Antwort: Durch Versuche und Experimente. Das wollen wir hier nun hypothetisch durchführen.

Versuch 1: Luft oder Vakuum zwischen zwei Platten und Spannung anlegen

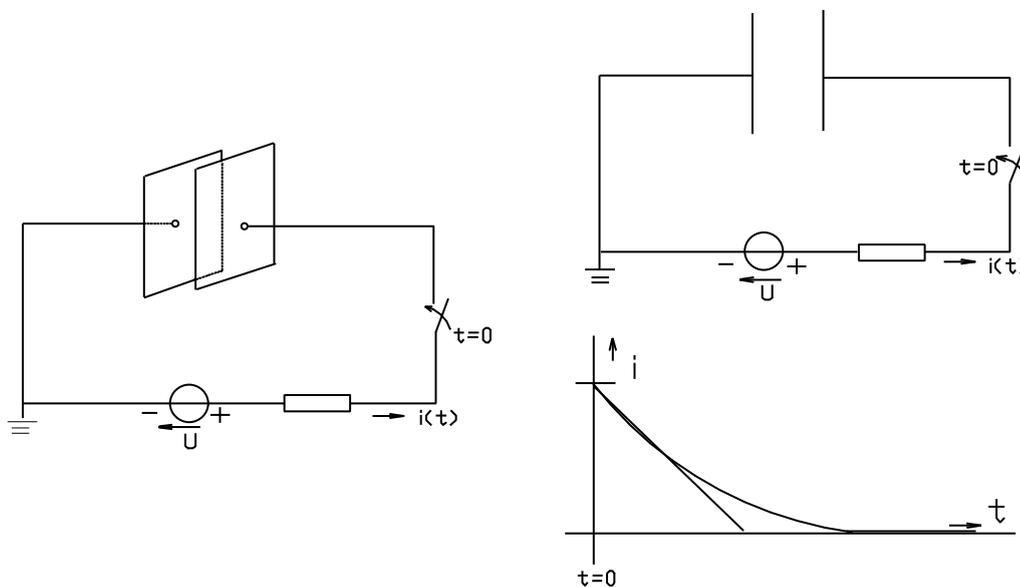


Bild EG81A

zu Versuch 1:

Nach dem Einschalten ist ein Strom festzustellen, der abnimmt und nach einiger Zeit zu Null wird. Da aber Luft oder Vakuum ein Nichtleiter ist, kann kein Stromfluss zwischen den beiden Elektroden stattgefunden haben. Was ist nun aber Strom? Die Antwort aus den ersten Semester lautet: Strom ist die resultiere der Bewegung von Ladungen. Zweite Frage: Wenn Ladungen bewegt wurden, wo befinden sich nun diese Ladungen? Antwort: Die Ladungen wandern zu den Elektroden (Platten) im elektrostatischen Feld.

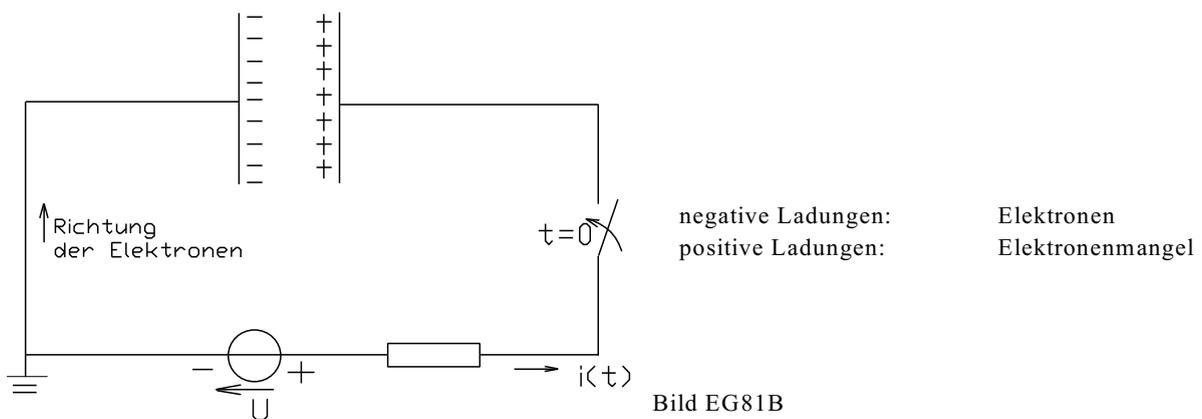


Bild EG81B

Versuch 2: Messung des Potentials

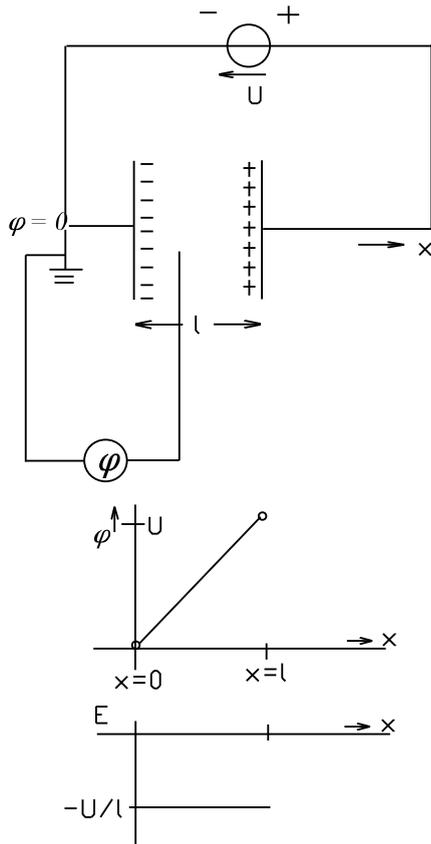


Bild EG81C

Zwischen den Platten kann ein konstanter Anstieg des Potentials festgestellt werden

=> konstante Feldstärke, weil homogenes Feld

Abklemmen der Spannungsquelle => Feldstärke (E) bleibt erhalten

Durch den oberen Versuch erfolgten die oberen zwei Feststellungen:

- Ladungsverschiebung zu den Platten
- Feldstärke in Elektrostatischen Feld.

Satz: Die Ursache des elektrostatischen Feldes sind Ladungen, die die Feldgröße \vec{E} der Feldstärke als Wirkung haben.

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.8.1.A	Das elektrostatische Feld basiert auf * Stromfluss zur Ladungsverschiebung * dauernden Stromfluss im Gleichfeld	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.8.1.B	Die Ursache des elektrostatische Feldes * sind verschobene Ladungen * ist dauernder Stromfluss	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.8.1.C	Verschobene Ladungen haben zur Folge * Spannung zwischen zwei Punkten * Strom zwischen zwei Punkten * Feldstärken im Raum	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

8.2. Kraft auf eine Ladung

Wiederholung aus dem 1. Semester

Versuch 3: Messung der Kraft auf eine Ladung im homogenen Feld

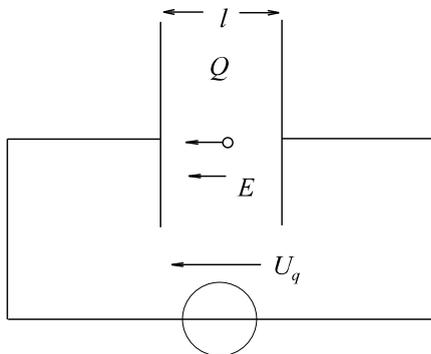


Bild EG82A

U_q	1	E	Q	F
U_{q0}	l_0	E_0	Q_0	F_0
$2U_{q0}$	l_0	$2E_0$	Q_0	$2F_0$
$3U_{q0}$	l_0	$3E_0$	Q_0	$3F_0$
U_{q0}	$2l_0$	$E_0/2$	Q_0	$F_0/2$
U_{q0}	$3l_0$	$E_0/3$	Q_0	$F_0/3$
U_{q0}	l_0	E_0	$2Q_0$	$2F_0$
U_{q0}	l_0	E_0	$3Q_0$	$3F_0$

Fazit $F \sim Q \cdot E$ $F = c \cdot Q \cdot E$

eine Proportionalitätskonstante ist in der Elektrotechnik frei wählbar hier

$$c = 1$$

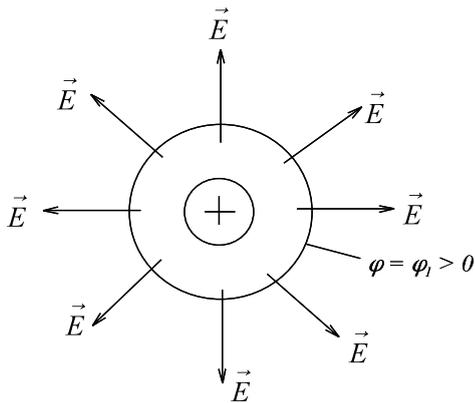
$$F = Q \cdot E$$

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.8.2.A	Eine positive Ladung erfährt eine Kraftwirkung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* in Richtung der Feldstärke * entgegen der Richtung der Feldstärke	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.8.2.B	Eine negative Ladung erfährt eine Kraftwirkung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* in Richtung der Feldstärke * entgegen der Richtung der Feldstärke	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

8.3. Zusammenwirken zweier Ladungen

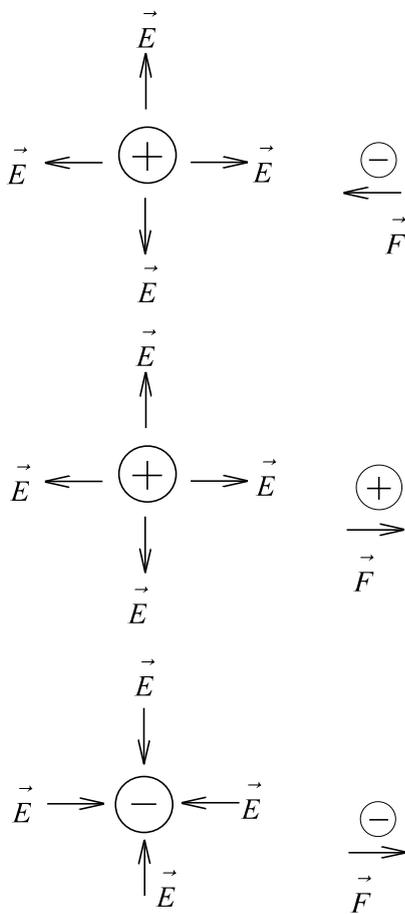
a) **Feld einer Einzelladung**



Eine Einzelladung hat ein radial nach außen gerichtetes Feld:

$$\vec{F} = Q * \vec{E}$$

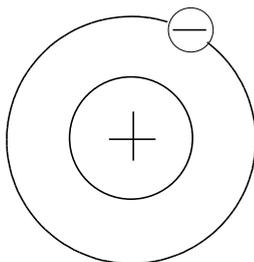
Bild EG83A



Eine positive Ladung erfährt eine Kraft in Richtung der Feldstärke, eine negative Ladung entgegengesetzt zur Feldstärke

ungleiche Ladung ziehen sich an gleichnamige Ladungen stoßen sich ab

Bild EG83B



Klassisches Beispiel:

Atom: Ausgleich von Zentripetal- und Zentrifugalkraft

Bild EG83C

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.8.3.A	Die Anziehung/Abstoßung zweier Ladungen basiert auf		
	* Magnetismus	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Feld der einen Ladung am Ort der anderen Ladung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Bewegung von Ladungsträgern	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eine Ladung erzeugt am Ort der anderen Ladung eine Feldstärke	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* eine Ladung erzeugt am Ort der anderen Ladung eine Strom	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

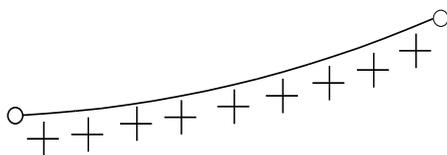
8.4. Ladungsarten

- a) Das Wesen der Ladung sind negative Elektronen und positive Kernladungen. Die als **Punktladungen** angenommen werden:

$$[Q] = [As] = C$$

Je nach geometrischer Anordnung einzelner Ladungen handelt es sich um Punkt-, Linien-, Flächen- oder Raumladungen.

- b) **Linienladung** λ

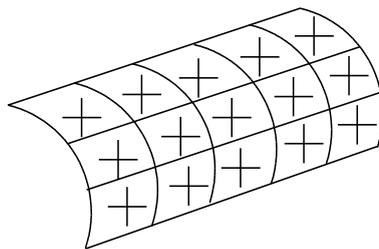


$$[\lambda] = \frac{As}{m} = \frac{C}{m}$$

$$Q = \int_{s=\text{weg}} \lambda(\text{Ort}) ds$$

Bild EG84A

- c) **Flächenladung** σ

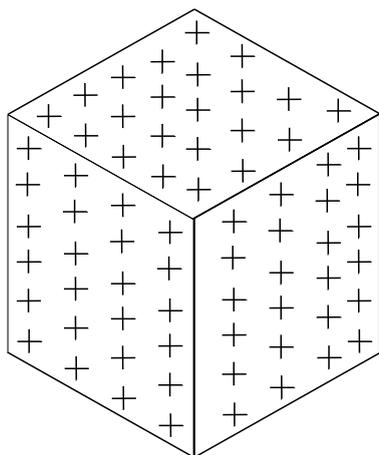


$$[\sigma] = \frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2}$$

$$Q = \int \int_{(A)} \sigma(\text{Ort}) dA$$

Bild EG84B

- d) **Volumen-, Raumladung** ρ



$$[\rho] = \frac{Aa}{m^3} = \frac{C}{m^3}$$

$$Q = \int \int \int_{(V)} \rho(\text{Ort}) dV$$

Bild EG84C

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.8.4.A	Mathematisch lassen sich Ladungen beschreiben als		
	* Linienladung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Flächenladung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	* Raumladung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

8.6. Zusammenhang zwischen den Vektoren D und E

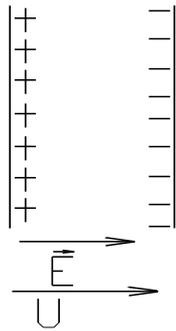


Bild EG86A

Wie viele Ladungen fließen nun auf die Platten pro Flächeneinheit. Ursache ist Feldstärke \vec{E} diese verursacht Flächenladung $\Rightarrow \vec{D} = f(\vec{E})$

Versuch 4:

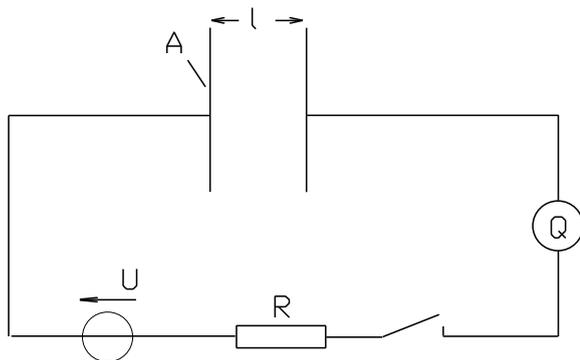


Bild EG86B

l	A	U	Q	E = U/l	D = Q/A	D/E
l ₁	A ₁	U ₁	Q ₁	U ₁ /l ₁ = E ₁	D ₁ = Q ₁ /A ₁	D ₁ /E ₁
2l ₁	A ₁	U ₁	Q ₁ /2	U ₁ /2l ₁ = E ₁ /2	(Q ₁ /2)/A ₁ = D ₁ /2	D ₁ /E ₁
3l ₁	A ₁	U ₁	Q ₁ /3	U ₁ /3l ₁ = E ₁ /3	(Q ₁ /3)/A ₁ = D ₁ /3	D ₁ /E ₁
l ₁	2A ₁	U ₁	2Q ₁	U ₁ /l ₁ = E ₁	2Q ₁ /2A ₁ = D ₁	D ₁ /E ₁
l ₁	3A ₁	U ₁	3Q ₁	U ₁ /l ₁ = E ₁	3Q ₁ /3A ₁ = D ₁	D ₁ /E ₁
l ₁	A ₁	2U ₁	2Q ₁	2U ₁ /l ₁ = 2E ₁	2Q ₁ /2A ₁ = 2D ₁	D ₁ /E ₁
l ₁	A ₁	3U ₁	3Q ₁	3U ₁ /l ₁ = 3E ₁	3Q ₁ /3A ₁ = 3D ₁	D ₁ /E ₁
Vorgabe			Messen	berechnet		

Fazit aus Versuch 4:

D ~ E D = const * E

Einführung der Dielektrizitätskonstanten: D = ε * E $\vec{D} = \epsilon * \vec{E}$

$$[\epsilon] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{\frac{As}{m^2}}{\frac{V}{m}} = \frac{As}{Vm}$$

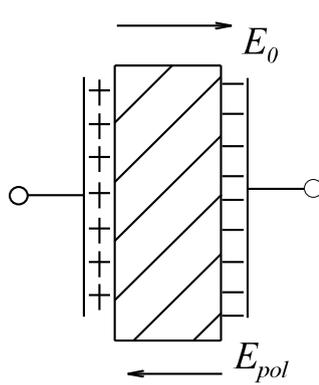
Dielektrizitätskonstanten ε ist vom Material abhängig. Für das Vakuum gilt:

$$\epsilon_{\text{Vakuum}} = \epsilon_0 = 8.854 * 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Versuch 5

- A] Ein Kondensator mit zwei Platten in Luft wird aufgeladen und die Spannungsquelle wieder abgeschaltet. Ergebnis: Die Spannung bleibt auf dem Wert der Quellspannung.
- B] In das Feld zwischen den Platten des Kondensators wird Materie (Nichtleiter) gebracht. Ergebnis: Die Spannung wird verringert.
- C] Die Materie wird wieder zwischen den Kondensatorplatten entfernt. Ergebnis: Die Spannung steigt wieder auf den Wert der (ursprünglichen) Quellspannung.

Fazit: Die Materie hat eine Wirkung. Dadurch wird die Feldstärke verringert. Wie kann die Feldstärke verringert werden? Antwort: Durch Überlagerung einer Polarisationsfeldstärke, ausgehend von der Materie, siehe Bild EG86C.



$$E_{res} = E_0 - E_{pol}$$

$$D = D_0$$

$$\epsilon = \frac{D}{E_{res}} = \frac{D_0}{E_0 - E_{pol}}$$

$$\epsilon = \frac{D_0}{E_0} * \frac{1}{1 - E_{pol} / E_0}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 * \epsilon_r$$

$$\epsilon_0 = \frac{D_0}{E_0}$$

$$\epsilon_r = \frac{1}{1 - E_{pol} / E_0} > 1$$

Bild EG86C \vec{E}

- $\epsilon_0 = 8.854 * 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ - Dielektrizitätskonstante des Vakuums
- ϵ_r - relative Dielektrizitätskonstante
- ϵ - (absolute) Dielektrizitätskonstante

Verhalten von Materie bei Anlegen einer elektrischen Feldstärke

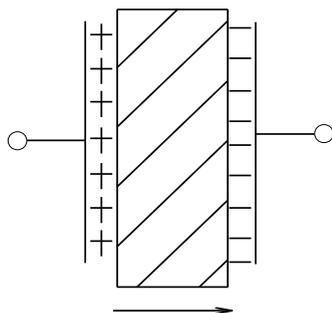


Bild EG86D

Aufbau der Materie

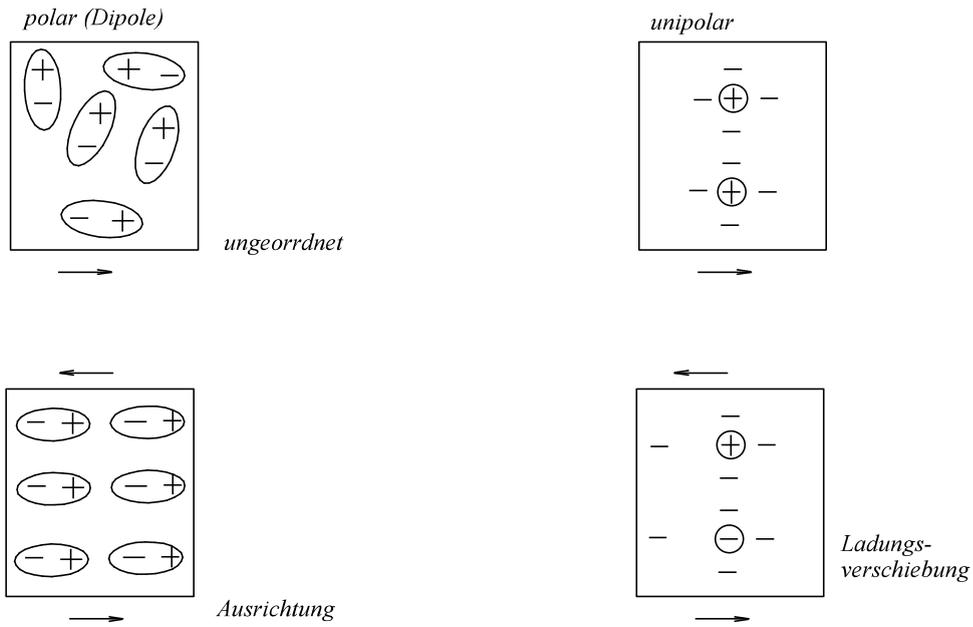


Bild EG86E

Permittivität

$\epsilon = \epsilon_0 * \epsilon_r = f(E)$

Einige ϵ_r - Werte

Vakuum	1.0000000	
Luft	1.00059	
Mineralöl	2.2...2.5	
Chlophen	4...5	
Ölpapier	3.5...4.5	
Hartpapier	4.5...5.5	
Spezialkeramik	bis 4000	
Glas	5...7	
Quarzglas	50 Hz	3.5...4.2
800 Hz	4.2	
100 kHz	4.4	
Wasser	80	
Eis (-20°C)	16	

Beispiel 1

(Klausur EG2, 06.07.1993, SS1993, Aufgabe 9, ergänzt um Punkt c)

Im elektrostatischen Feld eines Materials mit der Permeabilität $\epsilon_r = 4$ ist das Potenzial

$$\varphi = 10 \text{ V} * \left[\left(\frac{x}{1 \text{ cm}} \right) + \left(\frac{y}{2 \text{ cm}} \right) + \left(\frac{z}{4 \text{ cm}} \right) \right]$$

gegeben. Berechnen Sie:

- a) die elektrische Feldstärke \vec{E}
 b) die Verschiebungsflussdichte \vec{D}
 c) den Verschiebungsfluss ψ durch die Fläche mit den folgenden Begrenzungen:
 $x_1 = 3 \text{ cm}$ $y_1 = 5 \text{ cm}$ $z_1 = 2 \text{ cm}$
 $x_2 = 8 \text{ cm}$ $y_2 = 5 \text{ cm}$ $z_2 = 5 \text{ cm}$

Lösungsweg:

- a) die elektrische Feldstärke
- \vec{E}

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$$

$$\vec{E} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = -10 \text{ V} \begin{pmatrix} \frac{1}{1 \text{ cm}} \\ \frac{1}{2 \text{ cm}} \\ \frac{1}{4 \text{ cm}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 10 \text{ V/cm} \\ 5 \text{ V/cm} \\ 2.5 \text{ V/cm} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1000 \text{ V/m} \\ 500 \text{ V/m} \\ 250 \text{ V/m} \end{pmatrix}$$

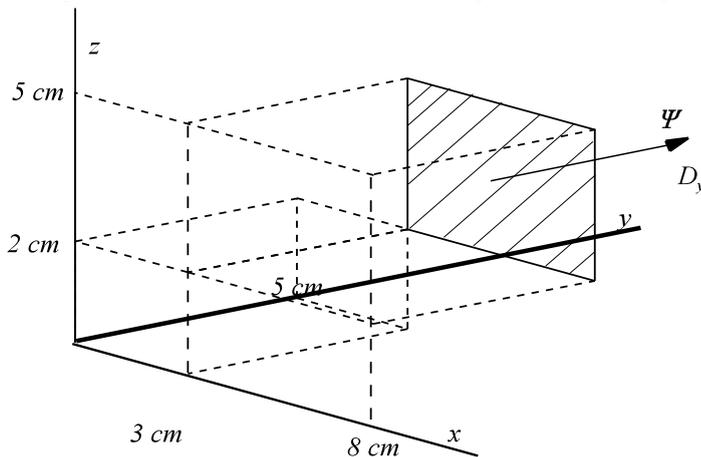
- b) die Verschiebungsflussdichte
- \vec{D}

$$\vec{D} = \epsilon * \vec{E} = \epsilon_0 * \epsilon_r * \vec{E} = 8.854 * 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} * 4 * \vec{E}$$

$$\vec{D} = -8.854 * 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{m}^2} * 4 * \begin{pmatrix} 1000 \text{ V/m} \\ 500 \text{ V/m} \\ 250 \text{ V/m} \end{pmatrix} = -8.854 * 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c) den Verschiebungsfluss
- ψ
- durch die Fläche mit den folgenden Begrenzungen:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 3 \text{ cm} & y_1 = 5 \text{ cm} & z_1 = 2 \text{ cm} \\ x_2 = 8 \text{ cm} & y_2 = 5 \text{ cm} & z_2 = 5 \text{ cm} \end{array}$$



$$\psi = D_y * A_y$$

$$D_y = -2 * 8.854 * 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$$

$$A_y = (z_2 - z_1) * (x_2 - x_1)$$

$$A_y = (5 \text{ cm} - 2 \text{ cm}) * (8 \text{ cm} - 3 \text{ cm})$$

$$A_y = 15 \text{ cm}^2 = 15 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\psi = -2 * 8.854 * 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{m}^2} * 15 * 10^{-4} \text{ m}^2 = -26.6 * 10^{-12} \text{ As}$$

Beispiel 2 (Klausur EG2, 03.07.1999, SS1999, Aufgabe 6)

In einem elektrostatischen Feld eines Materials mit $\epsilon_r = 4$ ist die folgende Verschiebungsflussdichte gegeben:

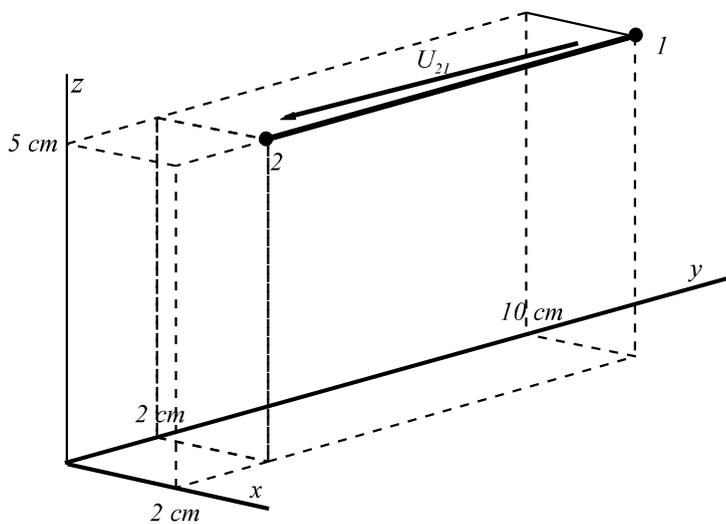
$$\vec{D} = 2.2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \begin{pmatrix} x \\ 7 \text{ cm} \\ y \\ 11 \text{ cm} \\ z \\ 13 \text{ cm} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Spannung U_{21} , das Potential $\varphi_{21} = \varphi_2(\vec{P}_2) - \varphi_1(\vec{P}_1)$, zwischen den Punkten:

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \text{ cm} \\ 2 \text{ cm} \\ 5 \text{ cm} \end{pmatrix} \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \text{ cm} \\ 10 \text{ cm} \\ 5 \text{ cm} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Sehen Sie sich den Weg von \vec{P}_1 nach \vec{P}_2 genau an, bevor Sie mit der Berechnung beginnen.

Lösungsweg:



hier nur der Weg in y-Richtung

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\int_1^2 d\varphi = -\int_1^2 E dy$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{y=2 \text{ cm}}^{10 \text{ cm}} E_y dy = U_{21}$$

$$D_y = 2.2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \cdot \frac{1}{0.1 \text{ m}} \cdot y = 20 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^3} \cdot y$$

$$E_y = \frac{D_y}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = \frac{20 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^3} \cdot y}{4 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}} = 564.7 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \cdot y$$

$$U_{21} = -\int_{y=0.02 \text{ m}}^{0.1 \text{ m}} 564.7 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \cdot y \cdot dy = -\frac{1}{2} \cdot 564.7 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \cdot y^2 \Big|_{y=0.02}^{0.1 \text{ m}}$$

$$U_{21} = -\frac{1}{2} \cdot 564.7 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \cdot [(0.1 \text{ m})^2 - (0.02 \text{ m})^2] = -2.71 \text{ kV}$$

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.8.6.A	Dielektrikum ist ein * elektrisch gut leitendes Material * (realer) Isolator	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.8.6.B	Die Erhöhung von ϵ_r durch Materie wird hervorgerufen durch * Polarisation * Verrücken (Verschiebung) von Ladungen im Dielektrikum * Stromfluss (Gleichstrom)	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
AF.8.6.C	Ein Dielektrikum ($\epsilon_r > 1$) bewirkt * bei konstanter Spannung mehr Ladungen an den Platten * bei konstanter Spannung weniger Ladungen an den Platten * bei konstanter Ladung eine höhere Spannung * bei konstanter Ladung eine niedrigere Spannung	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Aufgabe 8.6.A

In einem elektrostatischen Feld ($\epsilon_r = 4$) beträgt das Potential

$$\varphi(x, y, z) = 100 \text{ V} \left[\frac{x}{2 \text{ cm}} + \frac{y}{4 \text{ cm}} + \frac{z}{5 \text{ cm}} \right]$$

Berechnen Sie:

- die Feldstärke \vec{E} .
- Die Verschiebungsflussdichte \vec{D} .
- Den Verschiebungsfluss ψ durch die x-y-Ebene der Fläche $A_z = 15 \text{ cm}^2$.

Aufgabe 8.6.B (Klausur EG2, 24.01.2002, WS2001/2002, Aufgabe 8)

In einem elektrostatischen Feld mit der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_r = 4.2$ weist die Verschiebungsflussdichte die folgende Funktion auf:

$$\vec{D} = 0.4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2} * \begin{pmatrix} -2x / 1\text{cm} \\ -3y / 1\text{cm} \\ 5z / 1\text{cm} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Spannung U_{21} zwischen den Punkten:

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 1\text{cm} \\ 2\text{cm} \\ 3\text{cm} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 1\text{cm} \\ 2\text{cm} \\ 5\text{cm} \end{pmatrix}$$

8.7. Der Begriff der Kapazität

Aufgabe: Welche Ladungsmenge ist auf den Platten im elektrostatischen Feld vorhanden.

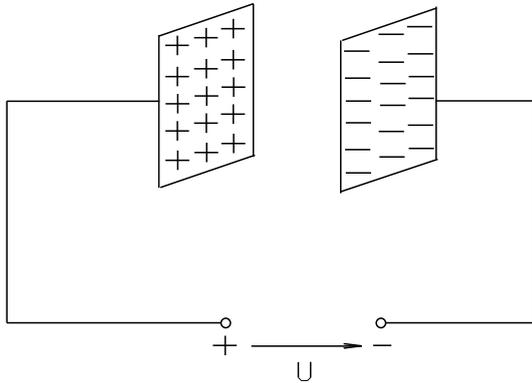


Bild EG87A

$$Q = D \cdot A$$

$$Q = \epsilon \cdot E \cdot A$$

$$Q = \epsilon \cdot \frac{U}{l} \cdot A$$

$$Q = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{l} \cdot U$$

$$Q = (\text{Konstante} \cdot \text{geometrische Größe}) \cdot U$$

$$Q = C \cdot U$$

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{l} \quad \text{Kapazität eines Plattenkondensators}$$

$$Q = \int i dt$$

$$\int i_C dt = C \cdot u_C \quad C \cdot \frac{du_C}{dt} = i_C$$

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

Beispiel 1

Ein Plattenkondensator mit Dielektrikum $\epsilon_r = 5$, der Fläche $A = 20 \text{ cm}^2$ und dem Plattenabstand $d = 0.1 \text{ mm}$ wird an eine Spannung von $U = 100 \text{ V}$ angeschlossen.

- Berechnen Sie die Kapazität C .
- Die gespeicherte Ladung Q ist zu bestimmen.
- Berechnen Sie die Flächeladungsdichte σ auf den Platten.
- Berechnen Sie die Verschiebungsflussdichte D im Dielektrikum.
- Bestimmen Sie die Feldstärke.
- Ermitteln Sie die Verschiebungsflussdichte D aus der Feldstärke.
- Ermitteln Sie die gespeicherte Ladung Q mit Hilfe der Verschiebungsflussdichte.

Lösungsweg:

gegeben: $\epsilon_r = 5$ $A = 20 \text{ cm}^2 = 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ $d = 0.1 \text{ mm} = 0.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ $U = 100 \text{ V}$

- a) Berechnen Sie die Kapazität C .

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 5 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{0.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 0.8854 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 0.8854 \text{ nF}$$

- b) Die gespeicherte Ladung Q ist zu bestimmen.

$$Q = C \cdot U = 0.8854 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 100 \text{ V} = 88.54 \cdot 10^{-9} \text{ As}$$

- c) Berechnen Sie die Flächeladungsdichte σ auf den Platten.

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{88.54 \cdot 10^{-9} \text{ As}}{20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 44.27 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$$

- d) Berechnen Sie die Verschiebungsflussdichte D im Dielektrikum.

$$Q = \sigma = 44.27 \cdot 10^{-6} \text{ As/m}^2 \quad (\text{weil homogenes Feld})$$

- e) Bestimmen Sie die Feldstärke.

$$E = \frac{U}{d} = \frac{100 \text{ V}}{0.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 1.0 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

- f) Ermitteln Sie die Verschiebungsflussdichte D aus der Feldstärke.

$$D = \epsilon \cdot E = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 5 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 44.27 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$$

- g) Ermitteln Sie die gespeicherte Ladung Q mit Hilfe der Verschiebungsflussdichte.

$$Q = D \cdot A = 44.27 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \cdot 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 88.54 \cdot 10^{-9} \text{ As}$$

Beispiel 2

Ein Plattenkondensator in Luft wird auf $U_1 = 100 \text{ V}$ aufgeladen. Danach wird die Spannungsquelle abgeschlossen und der Abstand von $d_1 = 0.1 \text{ mm}$ auf $d_2 = 1 \text{ mm}$ erhöht. Wie groß ist dann die Spannung U_2 ?

Lösungsweg 1:

$$Q_1 = Q_2$$

$$D_1 \cdot A_1 = D_2 \cdot A_2$$

$$D_1 = D_2$$

$$\frac{E_1}{\epsilon_0} = \frac{E_2}{\epsilon_0}$$

$$E_1 = E_2$$

$$U_2 = E_2 \cdot d_2 = E_1 \cdot d_2 = \frac{U_1}{d_1} \cdot d_2 = 100 \text{ V} \cdot \frac{1 \text{ mm}}{0.1 \text{ mm}} = 1000 \text{ V}$$

Ladung bleibt gleich

$$A_1 = A_2$$

Verschiebungsflussdichte bleibt gleich

Feldstärke bleibt gleich

Spannung steigt

Lösungsweg 2:

$$Q_1 = Q_2$$

$$C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2$$

$$\epsilon_0 \cdot \frac{A_1}{d_1} \cdot U_1 = \epsilon_0 \cdot \frac{A_2}{d_2} \cdot U_2$$

$$A_1 = A_2$$

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{d_2}{d_1}$$

Beispiel 3

Ein Plattenkondensator in Luft wird auf $U_1 = 100 \text{ V}$ aufgeladen. Danach wird die Spannungsquelle abgeschlossen und Dielektrikum ($\epsilon_r = 5$) zwischen die Platten platziert. Wie groß ist dann die Spannung U_2 ?

Lösungsweg 1:

$$Q_1 = Q_2$$

$$D_1 \cdot A_1 = D_2 \cdot A_2$$

$$D_1 = D_2$$

$$\epsilon_0 \cdot E_1 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E_2$$

$$E_2 = \frac{E_1}{\epsilon_r}$$

$$U_2 = E_2 \cdot d_2 = \frac{E_1}{\epsilon_r} \cdot d_2$$

$$U_2 = \frac{E_1}{\epsilon_r} \cdot d_1 = \frac{U_1/d_1}{\epsilon_r} \cdot d_1 = \frac{U_1}{\epsilon_r} = \frac{100 \text{ V}}{5} = 20 \text{ V}$$

Ladung bleibt gleich

$$A_1 = A_2$$

Verschiebungsflussdichte bleibt gleich

Feldstärke sinkt (siehe Abschnitt 8.6)

$$d_1 = d_2$$

Lösungsweg 2:

$$Q_1 = Q_2$$

$$C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2$$

$$\epsilon_0 \cdot \frac{A_1}{d_1} \cdot U_1 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A_2}{d_2} \cdot U_2$$

$$A_1 = A_2, d_1 = d_2$$

$$U_2 = \frac{U_1}{\epsilon_r}$$

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :			richtig	falsch
AF.8.7.A	Als Kapazität wird definiert	* Ladungsaufnahme pro Spannung * Stromaufnahme pro Spannung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.8.7.B	In einer Kapazität fließt Strom bei	* konstanter Spannung * Änderung der Spannung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.8.7.C	Bei Erhöhung von ϵ_r	* bleibt die Kapazität gleich * verringert sich die Kapazität um den Faktor ϵ_r * erhöht sich die Kapazität um den Faktor ϵ_r	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.8.7.D	Der Strom in einer Kapazität C ist proportional	* der Kapazität C * der Spannung u * der Spannungsänderung du/dt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 8.7.A

Ein Plattenkondensator mit Dielektrikum $\epsilon_r = 4$, der Fläche $A = 500 \text{ cm}^2$ und dem Plattenabstand $d = 0.5 \text{ mm}$ wird an eine Spannung von $U = 20 \text{ V}$ angeschlossen.

- Berechnen Sie die Kapazität C.
- Die gespeicherte Ladung Q ist zu bestimmen.
- Berechnen Sie die Flächeladungsdichte σ auf den Platten.
- Berechnen Sie die Verschiebungsflussdichte D im Dielektrikum.
- Bestimmen Sie die Feldstärke.
- Ermitteln Sie die Verschiebungsflussdichte D aus der Feldstärke.
- Ermitteln Sie die gespeicherte Ladung Q mit Hilfe der Verschiebungsflussdichte.

Aufgabe 8.7.B

Ein Plattenkondensator in Luft wird auf $U_1 = 20 \text{ V}$ aufgeladen. Danach wird die Spannungsquelle abgeschlossen und der Abstand von $d_1 = 0.3 \text{ mm}$ auf $d_2 = 1.5 \text{ mm}$ erhöht. Wie groß ist dann die Spannung U_2 ?

Aufgabe 8.7.C

Ein Plattenkondensator in Luft wird auf $U_1 = 20 \text{ V}$ aufgeladen. Danach wird die Spannungsquelle abgeschlossen und Dielektrikum ($\epsilon_r = 4$) zwischen die Platten platziert. Wie groß ist dann die Spannung U_2 ?

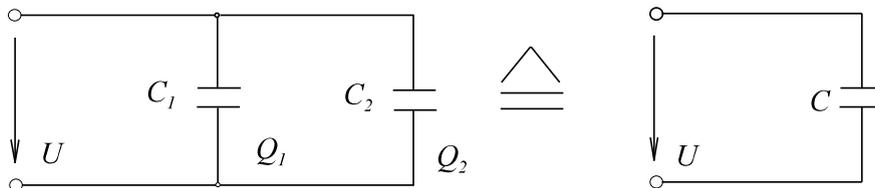
8.8. Schaltung von Kondensatoren**a) Parallelschaltung**

Bild EG88A

$$Q_1 = C_1 \cdot U$$

$$Q_2 = C_2 \cdot U$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$Q = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U$$

$$Q = (C_1 + C_2) \cdot U$$

$$Q = C \cdot U$$

$C = C_1 + C_2$

Bei der Parallelschaltung addieren sich die Kapazitäten

b) Reihenschaltung

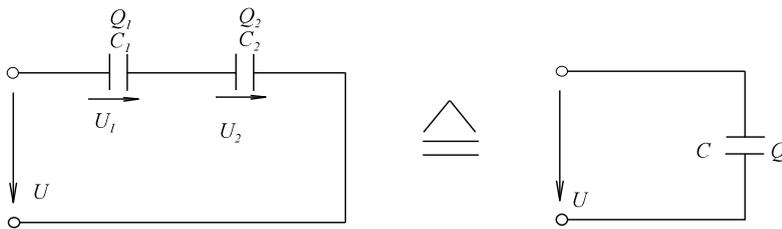


Bild EG88B

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$Q = U * \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = U * C$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Beispiel 1

Die Kapazitäten $C_1 = 1 \mu\text{F}$ und $C_2 = 4 \mu\text{F}$ werden

- parallel geschaltet
- in Reihe geschaltet.

Wie groß ist jeweils die Gesamtkapazität?

Lösungsweg:

- parallel geschaltet

$$C = C_1 + C_2 = 1 \mu\text{F} + 4 \mu\text{F} = 5 \mu\text{F}$$

- in Reihe geschaltet.

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 * C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{\frac{1}{1 \mu\text{F}} + \frac{1}{4 \mu\text{F}}} = 0,8 \mu\text{F}$$

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.8.8.A	In einer Parallelschaltung		
	* erhöht sich die Gesamtkapazität in Verhältnis zu den Einzelkapazitäten * verringert sich die Gesamtkapazität in Verhältnis zu den Einzelkapazitäten	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.8.8.B	In einer Reihenschaltung		
	* erhöht sich die Gesamtkapazität in Verhältnis zu den Einzelkapazitäten * verringert sich die Gesamtkapazität in Verhältnis zu den Einzelkapazitäten	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 8.8.A

Die Kapazitäten $C_1 = 20 \text{ nF}$ und $C_2 = 80 \text{ nF}$ werden

- parallel geschaltet
- in Reihe geschaltet.

Wie groß ist jeweils die Gesamtkapazität?

8.9. Berechnung von Kondensatoren

8.9.1. Plattenkondensator

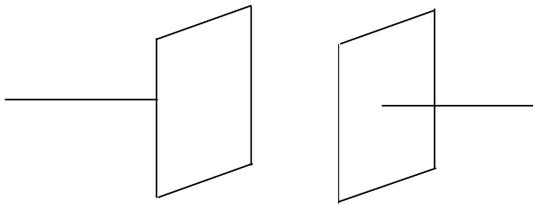


Bild EG891A

$$C = \epsilon * \frac{A}{l}$$

aus Kap. 8.7

8.9.2. Analytische Kapazitätsberechnung

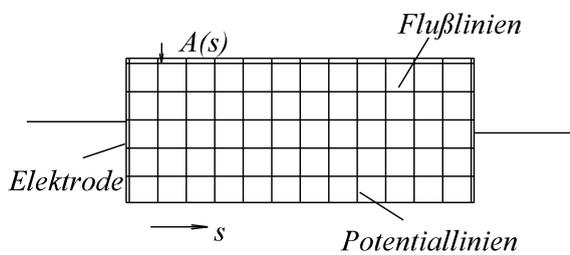


Bild EG892A

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon} * \frac{ds}{A(s)}$$

$$C = \epsilon * \frac{1}{\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{A(s)}}$$

8.9.3. Konzentrischer Zylinder-Kondensator

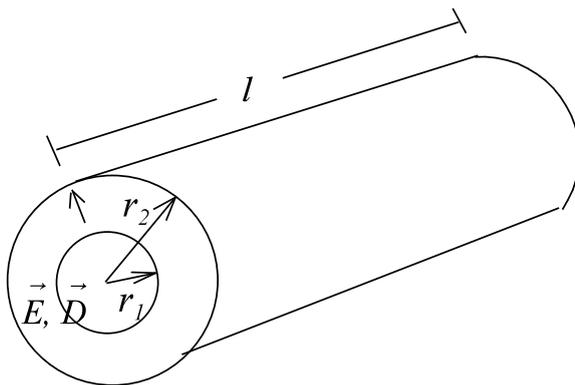


Bild EG893A

gesucht: C

a) Formel nach 8.9.2 anwenden

$$ds = dr \quad A(s) = A(r) = l * 2\pi * r$$

$$C = \epsilon * \frac{1}{\frac{1}{2\pi * l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr}$$

$$C = \frac{\epsilon * 2\pi * l}{\ln(r_2 / r_1)}$$

b) Ansatz eines konstanten Verschiebungsflusses (Ladung) $\Psi_1 = \Psi_2$ - Verschiebungsfluss konstant

$$D(r_1) = D_1$$

$$\Psi = D_1 \cdot A_1 = D_1 \cdot 2\pi \cdot r_1 \cdot l$$

$$D(r) = \frac{\Psi}{A(r)} = \frac{D_1 \cdot 2\pi \cdot r_1 \cdot l}{2\pi \cdot r \cdot l} = D_1 \cdot \frac{r_1}{r}$$

$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot D(r) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot D_1 \cdot \frac{r_1}{r}$$

$$\text{grad}(\varphi) = -\vec{E} \quad \text{hier nur r- Komponente}$$

$$\frac{d\varphi}{dr^*} = E(r^*) \quad d\varphi = -E(r^*) dr^*$$

$$\int_1^2 d\varphi = - \int_{r_1}^{r_2} E(r^*) dr^* = \int_{r_2}^{r_1} E(r^*) dr^*$$

$$\varphi(r) - \varphi_1 = \int_{r=r}^{r_1} \frac{D_1 \cdot r_1}{\varepsilon} \frac{dr}{r} = \frac{D_1 \cdot r_1}{\varepsilon} \ln\left(\frac{r_1}{r}\right)$$

$$\varphi(r) = \varphi_1 - \frac{D_1 \cdot r_1}{\varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

Randbedingungen: $\varphi(r_2) = \varphi_2 = 0$ $\varphi(r_1) = \varphi_1 = U$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{D_1 \cdot r_1}{\varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = U$$

$$D_1 = \frac{\varepsilon \cdot U}{r_1 \cdot \ln(r_2/r_1)}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{D_1 \cdot A_1}{U} = \frac{\varepsilon \cdot U}{r_1 \cdot \ln(r_2/r_1)} \cdot (2\pi \cdot r_1 \cdot l) \cdot \frac{1}{U}$$

$$C = \frac{2\pi \cdot l \cdot \varepsilon}{\ln(r_2/r_1)}$$

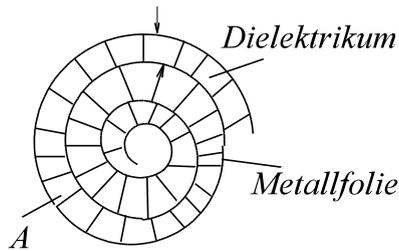
8.9.4. Konzentrischer Kugelkondensator $ds = dr$

$$A(r) = 4\pi \cdot r^2$$

$$C = \frac{\varepsilon}{\int_n^{r_2} \frac{dr}{A(r)}} = \frac{\varepsilon}{4\pi \int_{r=n}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr} = \frac{4\pi\varepsilon}{-\frac{1}{r} \Big|_{r=n}^{r_2}}$$

$$C = 4\pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

8.9.5. Wickelkondensator

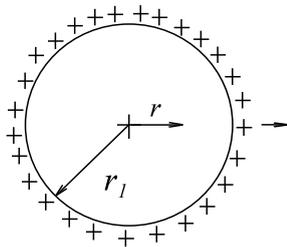


$$C = 2\varepsilon * \frac{A}{l}$$

Bild EG895A

8.9.6. Feld und Kapazität einer Doppelleitung

8.9.6.1. Feld einer Einzelleitung



gegeben: Leitung der Länge l (in Zeichenebene)
 r_1 - Radius der Leitung
 $Q_1 = Q$ Ladung auf der Leitung

Bild EG8961A

$$D(r) = \frac{Q}{A(r)} = \frac{Q}{l * 2\pi * r}$$

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi * \varepsilon * l * r}$$

$$d\varphi = -E dr$$

$$\varphi = -\int E dr + C_1$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi * \varepsilon * l} \int \left(-\frac{1}{r}\right) dr + C_1 = \frac{Q}{2\pi * \varepsilon * l} [-\ln(r) + C_1] = \frac{Q}{2\pi * \varepsilon * l} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \quad C_1 = \ln(r_0)$$

Damit ist das Feld einer Einzelleitung bestimmt

für $r = r_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$

8.9.6.2. Feld einer Doppelleitung auf der Verbindungslinie

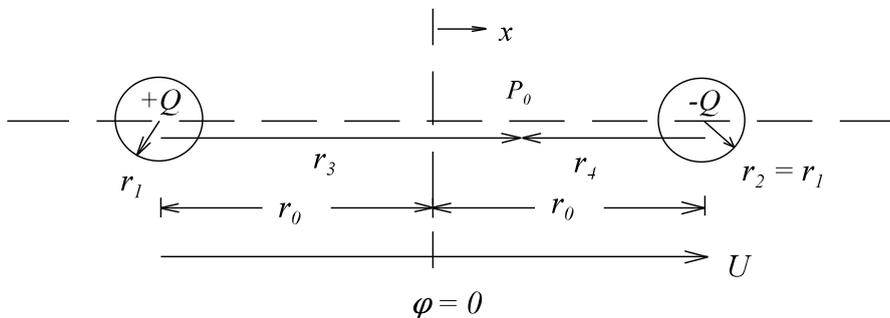


Bild EG8962A

Die beiden Felder der zwei oberen Einzelladungen sollen mit Hilfe der Formel aus dem letzten Abschnitt überlagert werden.

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi * \varepsilon * l} \ln\left(\frac{r_0}{r_y}\right)$$

Für die einzelnen Größen der oberen Formel gilt:

$$Q_1 = +Q$$

$$r = r_3 = r_0 + x$$

$$\varphi_1 = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln\left(\frac{r_0}{r_0 + x}\right)$$

$$Q_2 = -Q$$

$$r = r_4 = r_0 - x$$

$$\varphi_2 = \frac{-Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln\left(\frac{r_0}{r_0 - x}\right)$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \left[\ln\left(\frac{r_0}{r_0 + x}\right) - \ln\left(\frac{r_0}{r_0 - x}\right) \right]$$

$$\varphi(x) = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln\left(\frac{r_0 - x}{r_0 + x}\right)$$

$$U = \varphi(x=-r_0+r_1) - \varphi(x=r_0-r_1)$$

$$U = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \left[\ln\left(\frac{r_0 + r_0 - r_1}{r_0 - r_0 + r_1}\right) - \ln\left(\frac{r_0 - r_0 + r_1}{r_0 + r_0 - r_1}\right) \right]$$

$$U = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln\left(\frac{2r_0 - r_1}{r_1}\right) \tag{A}$$

$$Q = \frac{U \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{2r_0 - r_1}{r_1}\right)} \tag{B}$$

$$\varphi(x) = \frac{U \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot l}{2 \cdot \ln\left(\frac{2r_0 - r_1}{r_1}\right)} \ln\left(\frac{r_0 - x}{r_0 + x}\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{U}{2} \cdot \frac{\ln\left(\frac{r_0 + x}{r_0 - x}\right)}{\ln\left(\frac{2r_0 - r_1}{r_1}\right)}$$

8.9.6.3. Kapazität einer Doppelleitung

Die Gleichung (A) des letzten Abschnitts lässt sich auswerten:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{2r_0 - r_1}{r_1}\right)}$$

$2r_0 = a$ - Abstand der Leiter

r_1 - Radius der Leiter

$$C = \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{a - r_1}{r_1}\right)}$$

8.9.6.4. Potential der Doppelleitung

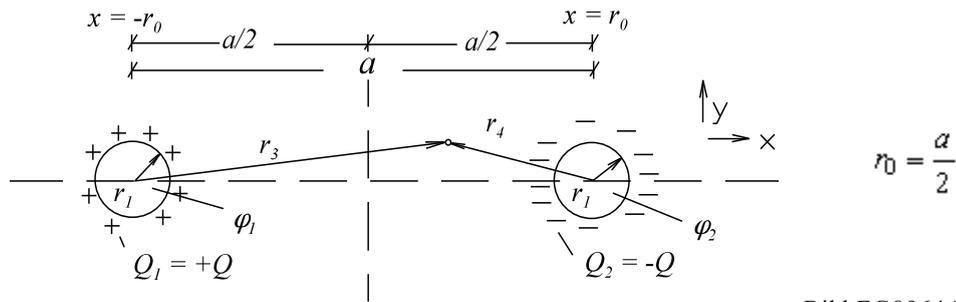


Bild EG8964A

Erweiterung der Theorie aus Kap. 8.9.6.2:

$$r_3^2 = (r_0 + x)^2 + y^2$$

$$r_4^2 = (x - r_0)^2 + y^2$$

$$\varphi_1 = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right)$$

$$\varphi_2 = \frac{-Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln\left(\frac{r_0}{r_4}\right)$$

$$\varphi(r_3, r_4) = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \left[\ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right) - \ln\left(\frac{r_0}{r_4}\right) \right]$$

$$\varphi(x, y) = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln\left(\frac{r_4^2}{r_3^2}\right)$$

Q => (B) aus Kap. 8.9.6.3

$$\varphi(x, y) = \frac{U \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{a - r_1}{r_1}\right)} * \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln\left(\frac{r_4^2}{r_3^2}\right)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{U}{4} \frac{1}{\ln\left(\frac{a - r_1}{r_1}\right)} * \ln \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}$$

 $\varphi = \text{const} \Rightarrow$

$$\frac{r_4}{r_3} = \text{const}$$

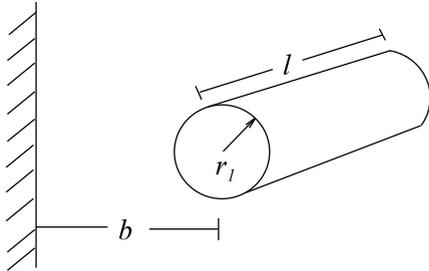
$$\frac{r_4^2}{r_3^2} = \text{const} = \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}$$

Die obere Gleichung ergibt Kreise unterschiedlicher Durchmesser und Mittelpunkte. Diese werden Apollonische Kreise genannt.

8.9.7. Kapazität einer Leitung gegen Erde

Aus Feldsymmetrie $\Rightarrow C_{\text{Erde}} = 2C_{\text{Doppelleitung}}$

$$C = \frac{\epsilon \cdot l \cdot 2\pi}{\ln\left(\frac{2b-r_1}{r_1}\right)}$$



$$b = \frac{a}{2}$$

$$a = 2b$$

Bild EG897A

8.9.8. Beispiele und Aufgaben zu Abschnitt 8.9

Beispiel 1

Ein Koaxialkabel der Länge $l = 20$ m, dem Innenradius $r_1 = 1$ mm und dem Außenradius $r_2 = 3$ mm wird an eine Spannung von $U = 100$ V/100 kHz angeschlossen. Die relative Permeabilität des Dielektrikums beträgt $\epsilon_r = 4$. Wie groß ist der Eingangsstrom der leerlaufenden Leitung?

Lösungsweg:

gegeben: $l = 20$ m
 $r_1 = 1$ mm $r_2 = 3$ mm Koaxialkabel $\epsilon_r = 4$
 $U = 100$ V $f = 100$ kHz

gesucht: I

$$C = \frac{\epsilon \cdot 2\pi \cdot l}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{4 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 2\pi \cdot 20\text{m}}{\ln(3\text{mm}/1\text{mm})} = 4.051 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 4.051 \text{ nF}$$

$$\underline{I} = j \cdot \omega \cdot C \cdot \underline{U}$$

$$I = 2\pi \cdot f \cdot C \cdot U = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \cdot 4.051 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 100\text{V} = 0.255 \text{ A}$$

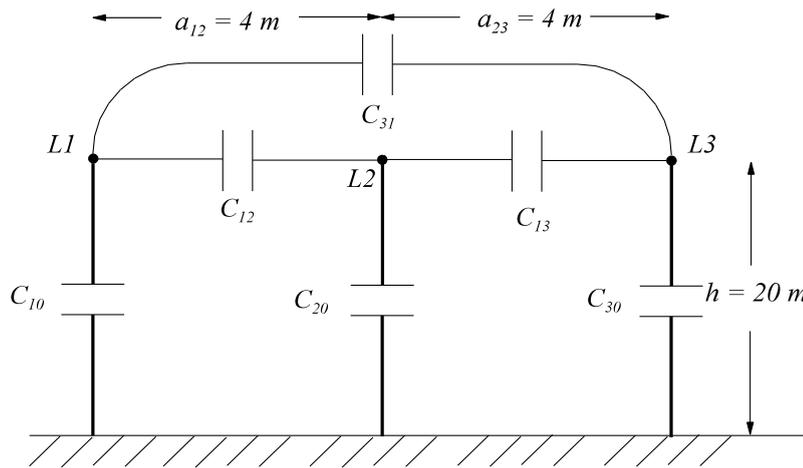
Beispiel 2

Eine leerlaufende 380 kV/50 Hz Leitung ist unüblicherweise im Sternpunkt geerdet. Die Leitung der Länge $l = 100$ km ist in einer Ebene $h = 20$ m über der Erde angeordnet. Die Leiter haben einen Abstand $a_{12} = a_{23} = 4$ m, $a_{31} = 8$ m voneinander und einen Durchmesser von $d = 6$ cm.

- Die Leiter-Leiter-Kapazitäten C_{12} , C_{23} und C_{31} sind zu bestimmen.
- Berechnen Sie Leiter-Erde-Kapazitäten C_{10} , C_{20} und C_{30} .
- Zeichnen Sie ein ESB.
- Die Ströme infolge der Erde-Kapazitäten sind zu bestimmen.
- Berechnen Sie die Ströme infolge der Leiter-Leiter-Kapazitäten.
- Geben Sie den Gesamtstrom an.
- Die Erdung des Sternpunktes wird entfernt. Wie groß ist der Leiterstrom?

Lösungsweg:

gegeben: $U = 380 \text{ kV}$
 $f = 50 \text{ Hz}$
 $r = 3 \text{ cm}$
 $l = 100 \text{ km}$



a) Die Leiter-Leiter-Kapazitäten C_{12} , C_{23} und C_{31} sind zu bestimmen.

$$C_{12} = C_{23} = \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{a_{12} - r}{r}\right)} = \frac{\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 10^5 \text{ m}}{\ln\left(\frac{4\text{m} - 0.03\text{m}}{0.03\text{m}}\right)} = 0.5694 \mu\text{F}$$

$$X_{12} = X_{23} = \frac{-1}{\omega \cdot C_{12}} = \frac{-1}{2\pi \cdot 50\text{s}^{-1} \cdot 0.5694 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}} = -5590 \Omega$$

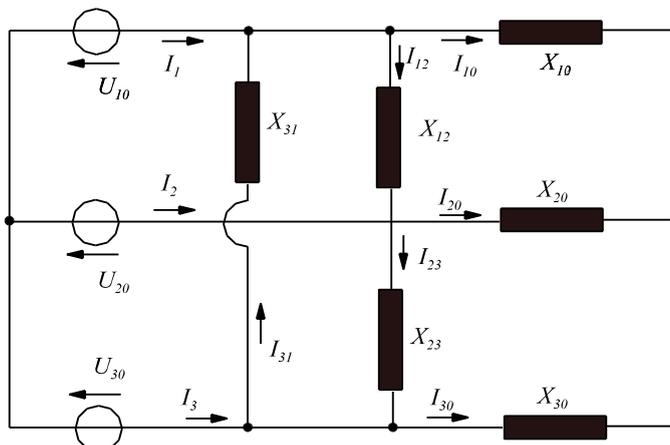
$$C_{31} = \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{a_{31} - r}{r}\right)} = \frac{\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 10^5 \text{ m}}{\ln\left(\frac{8\text{m} - 0.03\text{m}}{0.03\text{m}}\right)} = 0.4983 \mu\text{F}$$

$$X_{31} = -\frac{1}{\omega \cdot C_{31}} = -\frac{1}{2\pi \cdot 50\text{s}^{-1} \cdot 0.4983 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}} = -6388 \Omega$$

b) Berechnen Sie Leiter-Erde-Kapazitäten C_{10} , C_{20} und C_{30} .

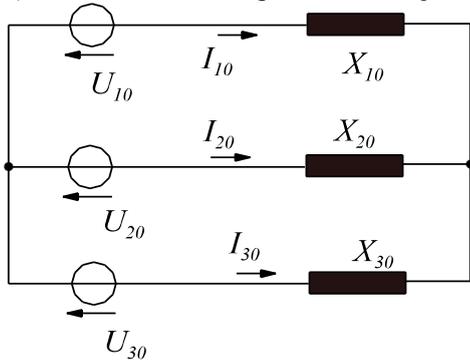
$$C_{10} = C_{20} = C_{30} = \frac{\epsilon \cdot l \cdot 2\pi}{\ln\left(\frac{2 \cdot h - r}{r}\right)} = \frac{8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 2\pi}{\ln\left(\frac{2 \cdot 20\text{m} - 0.03\text{m}}{0.03\text{m}}\right)} = 0.7732 \mu\text{F}$$

$$X_{10} = -\frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C_{10}} = -\frac{1}{2\pi \cdot 50\text{s}^{-1} \cdot 0.7732 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}} = -4117 \Omega$$



c) Zeichnen Sie ein ESB.

d) Die Ströme infolge der Erde-Kapazitäten sind zu bestimmen.

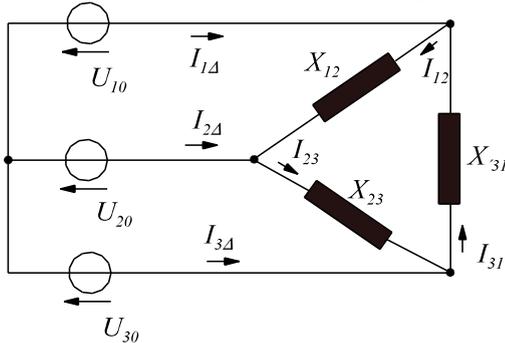


$$I_0 = \frac{380 \text{ kV}}{\sqrt{3} X_0} = \frac{380 \cdot 10^3 \text{ V}}{\sqrt{3} \cdot 4117 \Omega} = 53.29 \text{ A}$$

$I_{10} = 53.29 \text{ A } /90^\circ$ weil $\underline{U}_{10} = U /0^\circ$ und I und U um 90° verschoben

$I_{20} = 53.29 \text{ A } /-30^\circ$
 $I_{30} = 53.29 \text{ A } /-150^\circ$

e) Berechnen Sie die Ströme infolge der Leiter-Leiter-Kapazitäten.



$$\underline{I}_{12} = \frac{380 \cdot 10^3 \text{ V} / 30^\circ}{5590 \Omega / -90^\circ} = 67.98 \text{ A} / 120^\circ$$

$I_{23} = 67.98 \text{ A } /0^\circ$

$$\underline{I}_{31} = \frac{380 \cdot 10^3 \text{ V} / -210^\circ}{6388 \Omega / -90^\circ} = 59.49 \text{ A} / -120^\circ$$

$$\underline{I}_{1\Delta} = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 110.5 \text{ A} / 92.20^\circ$$

$$\underline{I}_{2\Delta} = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = 117.7 \text{ A} / -30.00^\circ$$

$$\underline{I}_{3\Delta} = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 110.5 \text{ A} / -152.20^\circ$$

f) Geben Sie den Gesamtstrom an.

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{10} + \underline{I}_{1\Delta} = 163.8 \text{ A} / 91.48^\circ$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{20} + \underline{I}_{2\Delta} = 171.0 \text{ A} / -30.00^\circ$$

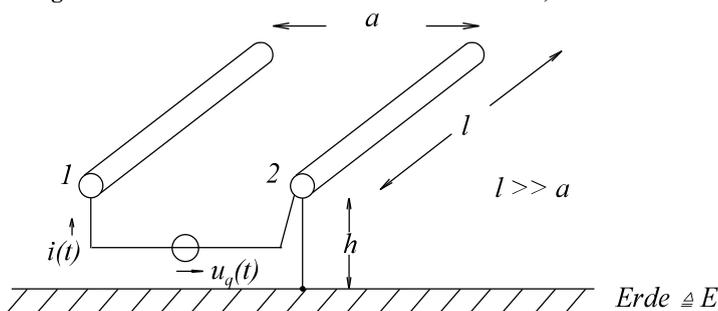
$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{30} + \underline{I}_{3\Delta} = 163.8 \text{ A} / -151.48^\circ$$

g) Die Erdung des Sternpunktes wird entfernt. Wie groß ist der Leiterstrom?

Es tritt keine Änderung auf, weil eine symmetrische Sternschaltung vorliegt. Die unsymmetrische Dreischaltung hat keinen Einfluss auf das Sternpunktspotenzial. Bei langen Drehstromleitungen werden zyklisch die Phasen vertauscht.

Aufgabe 8.9.A

Klausur EG2 24.01.1998, WS1997/1998 Aufgabe 6



Eine leerlaufende Wechselstrom-Freileitung wird an die Spannungsquelle $u_q(t)$ angeschlossen. Der Leiter 2 ist geerdet. Berechnen Sie den Strom $i(t)$ in der Form $i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$. Geben Sie \hat{i} , ω , φ_i an.

Gegebene Daten:

- $l = 300 \text{ m}$ - Länge der Leitung
- $a = 0.2 \text{ m}$ - Abstand der Leiter
- $d = 8 \text{ mm}$ - Durchmesser der Leiter
- $h = 6 \text{ m}$ - Höhe der Leitung über Erdboden
- $U_q = 230 \text{ V}$ - Effektivwert der harmonischen Spannungsquelle
- $\varphi_q = 30^\circ$ - Phasenwinkel der Spannungsquelle
- $f = 50 \text{ Hz}$ - Frequenz der Spannungsquelle

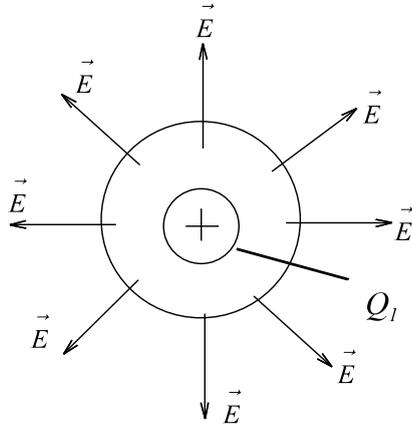
- a) Skizzieren Sie ein Ersatzschaltbild (ESB) mit **zwei** Kapazitäten.
- b) Berechnen Sie die ESB-Elemente.
- c) Bestimmen Sie \hat{i} , ω , φ_i .

8.10. Kraft zwischen zwei Punktladungen

Schon diskutiert von der Richtung her

- gleiche Ladungen stoßen sich ab
- ungleiche Ladungen ziehen sich an

Wie groß ist der Wert der Kraft?

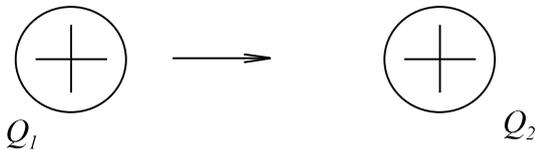


Q_1 - Punktladung
Feld einer Punktladung

$$D_1 = \frac{Q_1}{A_1(r)} = \frac{Q_1}{4\pi \cdot r^2}$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon} = \frac{Q_1}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^2}$$

Bild EG810A



$$\vec{F}_r = Q_2 \cdot \vec{E}_1 = \frac{Q_2 \cdot Q_1}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r_{12}^2} \cdot \vec{e}_r$$

Bild EG810B

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^2}$$

Beispiel 1

Zwei Punktladungen $Q_1 = +10^{-9}$ As und $Q_2 = -10^{-8}$ As befinden sich im Abstand $r = 5$ cm. Welche Kraft wirkt auf diese Ladungen. In welcher Richtung wirkt diese Kraft.

Lösungsweg:

gegeben: $Q_1 = +10^{-9}$ As $Q_2 = -10^{-8}$ As $r = 5$ cm = 0.05 m

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^2} = \frac{-10^{-9} \text{ As} \cdot 10^{-8} \text{ As}}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot (0.05 \text{ m})^2} = -3.595 \cdot 10^{-5} \frac{\text{VAs}}{\text{m}} = -3.595 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

Die Ladungen ziehen sich an.

Beispiel 2

In einem Plattenkondensator (homogenes Feld) von 10 cm Abstand befindet sich eine Ladung $Q = 10^{-9}$ As. Am Plattenkondensator liegt eine Spannung von $U = 50$ kV. Wie groß ist die Kraft auf die Ladung und in welcher Richtung ist die Kraft gerichtet.

Lösungsweg:

gegeben: Plattenkondensator
 $Q = 10^{-9}$ As $U = 50$ kV $a = 10$ cm = 0.1 m

$$E = \frac{U}{a} = \frac{50 \text{ kV}}{0.1 \text{ m}} = 500 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$F = Q \cdot E = 10^{-9} \text{ As} \cdot 500 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{VAs}}{\text{m}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

Die Kraft wirkt bei einer positiven Ladung in Richtung der Feldstärke.

Aufgabe 8.10.A

Zwei Punktladungen $Q_1 = +5 \cdot 10^{-6} \text{ As}$ und $Q_2 = +3 \cdot 10^{-7} \text{ As}$ befinden sich im Abstand $r = 2 \text{ mm}$. Welche Kraft wirkt auf diese Ladungen. In welcher Richtung wirkt diese Kraft.

Aufgabe 8.10.B

In einem Plattenkondensator (homogenes Feld) von 2 mm Abstand befindet sich eine Ladung $Q = -4 \cdot 10^{-6} \text{ As}$. Am Plattenkondensator liegt eine Spannung von $U = 4 \text{ kV}$. Wie groß ist die Kraft auf die Ladung und in welcher Richtung ist die Kraft gerichtet.

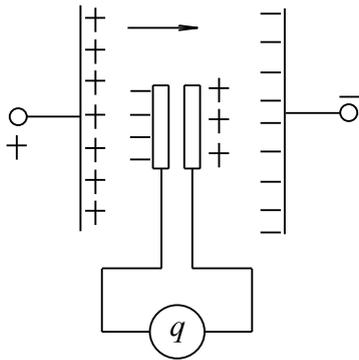
8.11. Influenz, Faradayischer Käfig**Versuch 6:**

Bild EG811A

Zwei Platten werden in ein Feld gebracht. Was passiert? Es erfolgt aufgrund der Feldstärke eine Ladungsausrichtung

- + in Richtung E
- entgegengesetzt E

Effekt bedeutet es werden Ladungen influenziert man spricht von Influenz.

Größe der influenzierten Ladung: $Q_{\text{inf}} = D \cdot A = \psi$

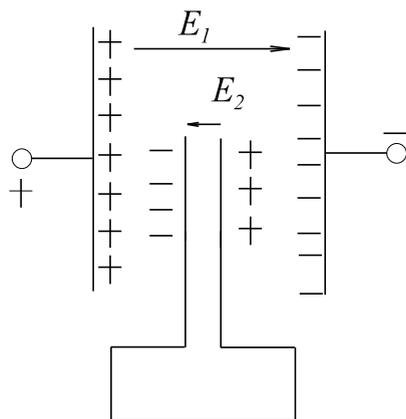


Bild EG811B

$$E_2 = -E_1$$

Überlagerung hebt sich auf.

=> Feldfreier Raum

Faradayischer Käfig

Auswahlfrage Die folgenden Behauptungen sind :		richtig	falsch
AF.8.11.A	Influenz bedeutet: * Ladungsverschiebung im Dielektrikum infolge elektrischer Feldstärke. * Ladungsverschiebung in Leitern infolge elektrischer Feldstärke.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.8.11.B	Influenz hat als Auswirkung: * Feldfreier Raum durch Überlagerung von Feldstärken * Feldverstärkung durch Überlagerung von Feldstärken	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.8.11.C	Welche Anwendung beruht auf Influenz: * Induktion von Spannungen * Faradayischer Käfig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
AF.8.11.E	Technisch gesehen wirkt als Faradayischer Käfig: * Auto als Caprio gegen Blitzeinschlag * Auto als Metallkarosserie (nicht Caprio) gegen Blitzschlag * Transistorradio in Backofen gegen Radioempfang * Legehennenkäfig aus Metall gegen Blitzschlag * Legehennenkäfig aus Kunststoff gegen Blitzschlag * Transistorradio in Alufolie eingewickelt gegen Radioempfang * Transistorradio in Legehennenkäfig (Metall, grobmaschig) gegen Radioempfang	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

8.12. Energie des elektrischen Feldes

Platten-Kondensator:

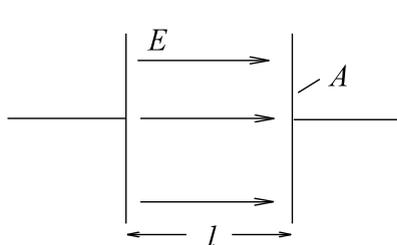
$$W = \int u \cdot i \cdot dt \quad \Rightarrow \quad i \cdot dt = dQ \quad Q = C \cdot u \quad dQ = C \cdot du = i \cdot dt$$

$$W = \int u \cdot dQ = u \cdot C \cdot du$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2$$

Energie eines geladenen Kondensators

Energiedichte des elektrostatischen Feldes



$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \quad C = \frac{\epsilon \cdot A}{l} \quad U = E \cdot l \cdot A = V$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon \cdot A}{l} \cdot (E \cdot l)^2 = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot E \cdot E \cdot A \cdot l$$

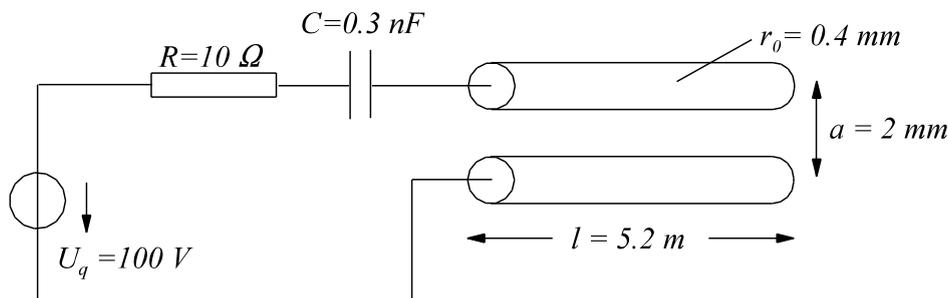
Bild EG812A

$$W = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot E^2 \cdot V = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D \cdot V = \frac{1}{2} \cdot \frac{D^2}{\epsilon} \cdot V$$

homogenes Feld

allgemein $dW = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot E^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \cdot \vec{D} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{D^2}{\epsilon} \cdot dV$ inhomogenes Feld

Beispiel 1



Ein leerlaufender Zweidrahtleiter mit den Daten

$l = 5.2 \text{ m}$ Leiterlänge
 $r_0 = 0.4 \text{ mm}$ Leiterradius
 $a = 2 \text{ mm}$ Leiterabstand

wird laut obiger Skizze in Reihe an eine Spannungsquelle $U_q = 100 \text{ V}$, an einen Widerstand $R = 10 \text{ Ohm}$ und an einen zusätzlichen Kondensator $C = 0.3 \text{ nF}$ verschaltet. Bei dem Zweidrahtleiter kann mit $\epsilon_r = 1$ gerechnet werden. Bestimmen Sie die elektrostatische Energie, die in der **gesamten** Schaltung gespeichert ist.

Lösungsweg:

$$C_{\text{Kabel}} = \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{a - r_1}{r_1}\right)} = \frac{\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 1 \cdot 5.2 \text{ m}}{\ln\left(\frac{2 \text{ mm} - 0.4 \text{ mm}}{0.4 \text{ mm}}\right)} = 0.1043 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 0.1043 \text{ nF}$$

$$C_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{\text{Kabel}}}} = \frac{1}{\frac{1}{0.3 \text{ nF}} + \frac{1}{0.1043 \text{ nF}}} = 0.07739 \text{ nF} \quad (\text{Reihenschaltung})$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C_{\text{ges}} \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.07739 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot (100 \text{ V})^2 = 0.387 \cdot 10^{-6} \text{ VAs} = 0.387 \mu\text{Ws}$$

Beispiel 2

In einem elektrostatischen Feld ist das Potenzial

$$\varphi(x, y, z) = 1000V * \left[9 * \frac{x}{mm} + 20 * \frac{y}{mm} + 12 * \frac{z}{mm} \right]$$

vorhanden. Geben Sie die elektrostatische Energie an, die im Volumen mit $\epsilon_r = 5$ und den Begrenzungen

$$x_1 = 5 \text{ cm}$$

$$y_1 = 2 \text{ cm}$$

$$z_1 = 3 \text{ cm}$$

$$x_2 = 12 \text{ cm}$$

$$y_2 = 20 \text{ cm}$$

$$z_2 = 16 \text{ cm}$$

gespeichert ist.

Lösungsweg:

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = -1000 \frac{V}{mm} \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -20 \\ -12 \end{pmatrix} * 10^6 \frac{V}{m}$$

$$E = |\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{(-9)^2 + (-20)^2 + (-12)^2} * 10^6 \frac{V}{m} = 25 * 10^6 \frac{V}{m}$$

$$V = (x_2 - x_1) * (y_2 - y_1) * (z_2 - z_1) = (12 \text{ cm} - 5 \text{ cm}) * (20 \text{ cm} - 2 \text{ cm}) * (16 \text{ cm} - 3 \text{ cm}) = 1638 \text{ cm}^3 = 1.638 * 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$W = \frac{1}{2} * \epsilon * E^2 * V = \frac{1}{2} * 5 * 8.854 * 10^{-12} \frac{As}{Vm} * \left(25 * 10^6 \frac{V}{m} \right)^2 * 1.638 * 10^{-3} \text{ m}^3 = 22.7 \text{ Ws}$$

Beispiel 3

In einem elektrostatischen Feld ist das Potenzial

$$\varphi(x, y, z) = 1000V \left(\frac{x}{1cm} \right)^2$$

vorhanden. Geben Sie die elektrostatische Energie an, die im Volumen mit $\epsilon_r = 6$ und den Begrenzungen

$$x_1 = 1 \text{ cm}$$

$$y_1 = 2 \text{ cm}$$

$$z_1 = 5 \text{ cm}$$

$$x_2 = 4 \text{ cm}$$

$$y_2 = 5 \text{ cm}$$

$$z_2 = 15 \text{ cm}$$

gespeichert ist.

Lösungsweg:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{d\varphi}{dx} = -2 * 1000 \frac{V}{cm^2} * x = -2 * 10^7 \frac{V}{m^2} * x$$

$$W = \int \frac{1}{2} * \epsilon * E^2 * dV$$

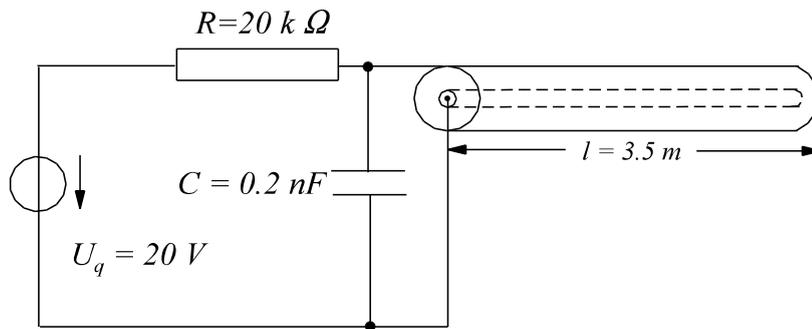
$$dV = A_x * dx$$

$$A_x = (y_2 - y_1) * (z_2 - z_1) = (5 \text{ cm} - 2 \text{ cm}) * (15 \text{ cm} - 5 \text{ cm}) = 30 \text{ cm}^2 = 30 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$W = \int_{x=x_1}^{x_2} \frac{1}{2} * \epsilon_0 * \epsilon_r * \left(-2 * 10^7 \frac{V}{m^2} * x \right)^2 * A_x * dx = \frac{1}{2} * \epsilon_0 * \epsilon_r * A_x * \left(-2 * 10^7 \frac{V}{m^2} \right)^2 \int_{x=x_1}^{x_2} x^2 dx$$

$$W = \frac{1}{2} * \epsilon_0 * \epsilon_r * A_x * 4 * 10^{14} \frac{V^2}{m^4} * \frac{1}{3} * x^3 \Big|_{x=x_1=0.01m}^{x_2=0.04m}$$

$$W = \frac{1}{2} * 8.854 * 10^{-12} \frac{As}{Vm} * 6 * 30 * 10^{-4} \text{ m}^2 * 4 * 10^{14} \frac{V^2}{m^4} * \frac{1}{3} * \left[(0.04m)^3 - (0.01m)^3 \right] = 0.669 \text{ Ws}$$

Aufgabe 8.12.A

Ein leerlaufendes Koaxialkabel mit den Daten

$l = 3.5 \text{ m}$	Leiterlänge
$r_i = 0.8 \text{ mm}$	Leiterinnenradius
$r_a = 3.2 \text{ mm}$	Leiternaussenradius

wird laut obiger Skizze in Reihe an eine Spannungsquelle $U_q = 20 \text{ V}$, an einen Widerstand $R = 20 \text{ k}\Omega$ und an einen zusätzlichen Kondensator $C = 0.2 \text{ nF}$ verschaltet. Das Dielektrikum weist eine Dielektrizitätskonstante von $\epsilon_r = 4$ auf. Bestimmen Sie die elektrostatische Energie, die in der **gesamten** Schaltung gespeichert ist.

Aufgabe 8.12.B

In einem elektrostatischen Feld ist das Potenzial

$$\varphi(x, y, z) = 400 \text{ V} * \left[5 * \frac{x}{\text{mm}} + 4 * \frac{y}{\text{mm}} + 20 * \frac{z}{\text{mm}} \right]$$

vorhanden. Geben Sie die elektrostatische Energie an, die im Volumen mit $\epsilon_r = 4$ und den Begrenzungen

$$\begin{array}{lll} x_1 = 4 \text{ cm} & y_1 = 3 \text{ cm} & z_1 = 5 \text{ cm} \\ x_2 = 13 \text{ cm} & y_2 = 17 \text{ cm} & z_2 = 15 \text{ cm} \end{array}$$

gespeichert ist.

Aufgabe 8.12.C

In einem elektrostatischen Feld ist das Potenzial

$$\varphi(x, y, z) = 2000 \text{ V} * \left(\frac{z}{2 \text{ cm}} \right)^3$$

vorhanden. Geben Sie die elektrostatische Energie an, die im Volumen mit $\epsilon_r = 5$ und den Begrenzungen

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1 \text{ cm} & y_1 = 2 \text{ cm} & z_1 = 2 \text{ cm} \\ x_2 = 5 \text{ cm} & y_2 = 5 \text{ cm} & z_2 = 4 \text{ cm} \end{array}$$

gespeichert ist.

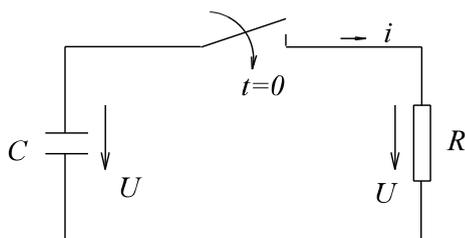
8.13. Entladen eines Kondensators

Bild EG813A

$$i = \frac{u}{R} = -C * \frac{du_C}{dt}$$

$$u_C = -R * i = -R * C * \frac{du_C}{dt}$$

Ansatz: $u = u_0 * e^{-t/T}$

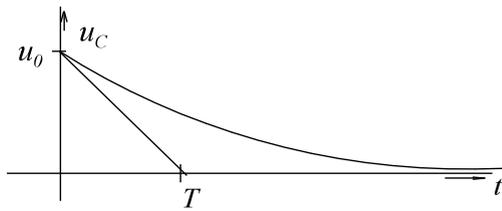
$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{T} * u_0 * e^{-t/T}$$

$$u_0 * e^{-t/T} = -R * C * \left(-\frac{1}{T} * u_0 * e^{-t/T} \right)$$

$$T = R * C$$

$$u = u_0 * e^{-t/T}$$

Zeitkonstante



Zweite Möglichkeit der Lösung:

$$u_C = -R * C * \frac{du_C}{dt}$$

$$\int dt = \int -R * C * \frac{du_C}{u}$$

$$t - t_0 = -R * C * \ln \frac{u}{u_0}$$

$$u = u_0 * e^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$

8.14. Verluste im elektrostatischen Feld

8.14.1. Isolations-Verluste

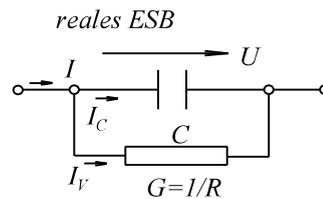
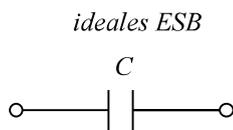


Bild EG8141A

Grund: Isolations Verluste des Dielektrikums

Wie wird der Isolationswiderstand gemessen? Kondensator aufladen und Entladezeitkonstante messen.

$$U_C = U_0(t=0) * e^{-t/R*C}$$

$$R * C = ?$$

$$R = \rho * \frac{l}{A}$$

$$C = \epsilon * \frac{A}{l}$$

$$R * C = \rho * \frac{l}{A} * \epsilon * \frac{A}{l} = \rho * \epsilon = T$$

$$\Rightarrow R = T/C$$

$$T = \rho * \epsilon$$

$$\rho * \epsilon = R * C$$

$$C = \frac{1}{R} * \rho * \epsilon$$

$$\epsilon = \epsilon_0 * \epsilon_r$$

$$\epsilon_0 = 8.854 * 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

	\$\rho\$ in \$\Omega m\$	\$\epsilon_r\$	T in s	T in min
Mineralöl	\$10^{14}\$	2.3	2036	34
Chlopfen	\$10^{13}\$	4.5	398	6.6
Ölimp. Papier	\$10^{16}\$	3.5	\$3.1 * 10^5\$	86 h
Hartpapier	\$10^{10}\$	4.5	0.39	

8.14.2. Dielektrische Verluste

Was ist das?

Was war Polarisation?

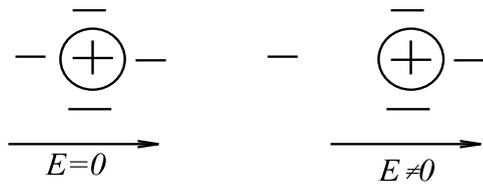


Bild EG8142A

Antwort: Ladungsverschiebung im dielektrischen Feld ($F = Q \cdot E$).

$dW = Q \cdot E \cdot ds \Rightarrow$ Ladungsverschiebung verbraucht Energie durch irreversible Wärmeumformung. Wann tritt Ladungsverschiebung auf bei Spannungsveränderungen oder bei Wechselstrom. D.h. diese Verluste müssen irgendwie repräsentiert werden. Also durch einen Widerstand der frequenzabhängig ist.

Angabe erfolgt nun üblicherweise nicht durch R oder G sondern durch $\tan(\delta)$ was ist nun δ

δ - Verlustwinkel

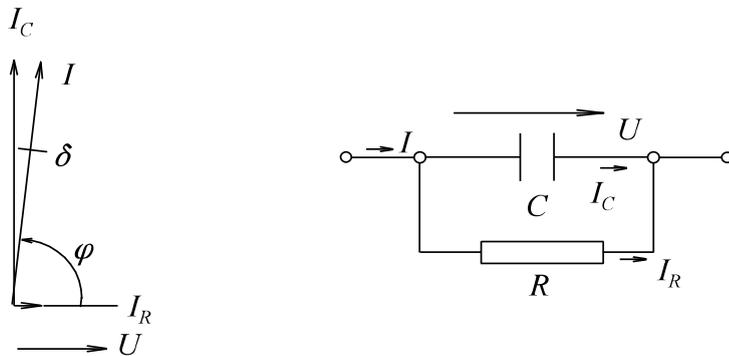


Bild EG8142B

$\tan(\delta)$ ist üblich als Angabe

$\tan(\delta)$ - Wert in 10^{-3}

	50 Hz	1 KHz	1 MHz
Hartpapier	4 bis 6	25 bis 100	20 bis 50
Papier impr.	5 bis 10	1.5 bis 10	30 bis 60
Quarz		0.1	0.1
Glimmer	0.3	0.1	0.17
PVC Hart/weich	20..150	15..150	15..100

Warum $\tan(\delta)$?

P_V - Verluste im Kondensator

$$P_V = U \cdot I_R = U \cdot I_C \cdot \tan(\delta)$$

$$I_C = U \cdot \omega \cdot C$$

$$P_V = U^2 \cdot \omega \cdot C \cdot \tan(\delta)$$

Beispiel 1

Ein Plattenkondensator ist mit Chlophen ($\rho = 10^{13} \Omega\text{m}$, $\epsilon_r = 4.5$) gefüllt. Die Plattenfläche beträgt $A = 0.3 \text{ m}^2$ und der Abstand $a = 1 \text{ mm}$.

- Die Kapazität C ist zu bestimmen.
- Berechnen Sie den Parallelwiderstand R .
- Wie groß ist die Zeitkonstante T .
- Der Kondensator wird auf $U_0 = 1000 \text{ V}$ aufgeladen. Wie groß ist die gespeicherte Ladung Q .
- Bestimmen Sie die gespeicherte Energie W .
- Nach welcher Zeit hat sich durch Entladung die Spannung auf $U = 750 \text{ V}$ verringert.

Lösungsweg:

gegeben: $\rho = 10^{13} \Omega\text{m}$ $\epsilon_r = 4.5$ $A = 0.3 \text{ m}^2$ $l = a = 1 \text{ mm}$

- a) Die Kapazität C ist zu bestimmen.

$$C = \epsilon_r \cdot \frac{A}{l} = 4.5 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \frac{0.3 \text{ m}^2}{10^{-3} \text{ m}} = 11.95 \text{ nF}$$

- b) Berechnen Sie den Parallelwiderstand R .

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 10^{13} \Omega\text{m} \cdot \frac{10^{-3} \text{ m}}{0.3 \text{ m}^2} = 3.333 \cdot 10^{10} \Omega$$

- c) Wie groß ist die Zeitkonstante T .

$$T = R \cdot C = \rho \cdot \epsilon = 398.3 \text{ s}$$

- d) Der Kondensator wird auf $U_0 = 1000 \text{ V}$ aufgeladen. Wie groß ist die gespeicherte Ladung Q .

$$Q = C \cdot U = 11.95 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 1000 \text{ V} = 11.95 \cdot 10^{-6} \text{ As}$$

- e) Bestimmen Sie die gespeicherte Energie W .

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 11.95 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 1000^2 \text{ V}^2 = 5.975 \text{ mWs}$$

- f) Nach welcher Zeit hat sich durch Entladung die Spannung auf $U = 750 \text{ V}$ verringert.

$$u(t) = U_0 \cdot e^{-t/T}$$

$$\ln \frac{u}{U_0} = -t/T$$

$$t = T \cdot \ln \left(\frac{U_0}{u} \right) = 398.3 \text{ s} \cdot \ln \left(\frac{1000 \text{ V}}{750 \text{ V}} \right) = 114.6 \text{ s}$$

Beispiel 2

Ein Hochspannungsplattenkondensator mit Phenolharz als Dielektrikum ($\epsilon_r = 5$) wird an eine Spannung von $10 \text{ kV}/50 \text{ Hz}$ angeschlossen. Maße: $A = 0.1 \text{ m}^2$ Plattenfläche und $a = 1 \text{ cm}$ Plattenabstand. Der Verlustfaktor beträgt $\tan(\delta) = 0.1$. Wie groß ist die Verlustleistung.

Lösungsweg:

gegeben: $\epsilon_r = 5$ $U = 10 \text{ kV}$ $f = 50 \text{ Hz}$ $A = 0.1 \text{ m}^2$ $a = 1 \text{ cm}$ $\tan(\delta) = 0.1$

$$C = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{l} = 5 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \frac{0.1 \text{ m}^2}{0.01 \text{ m}} = 0.4427 \text{ nF}$$

$$P_V = U^2 \cdot \omega \cdot C \cdot \tan(\delta) = 10^8 \text{ V}^2 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 0.4427 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 0.1 = 1.391 \text{ W}$$

Aufgabe 8.14.A

Ein Plattenkondensator ist mit Chlophen ($\rho = 10^{13} \Omega\text{m}$, $\epsilon_r = 4.5$) gefüllt. Die Plattenfläche beträgt $A = 0.4 \text{ m}^2$ und der Abstand $a = 2 \text{ mm}$.

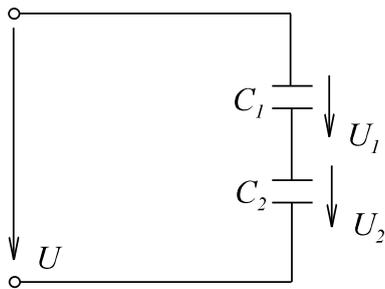
- Die Kapazität C ist zu bestimmen.
- Berechnen Sie den Parallelwiderstand R .
- Wie groß ist die Zeitkonstante T .
- Der Kondensator wird auf $U_0 = 2000 \text{ V}$ aufgeladen. Wie groß ist die gespeicherte Ladung Q .
- Bestimmen Sie die gespeicherte Energie W .
- Nach welcher Zeit hat sich durch Entladung die Spannung auf $U = 50 \text{ V}$ verringert.

Aufgabe 8.14.B

Ein Hochspannungsplattenkondensator mit Phenolharz als Dielektrikum ($\epsilon_r = 5$) wird an eine Spannung von 20 kV/50 Hz angeschlossen Maße: $A = 0.9 \text{ m}^2$ Plattenfläche und $a = 0.3 \text{ cm}$ Plattenabstand. Der Verlustfaktor beträgt $\tan(\delta) = 0.1$. Wie groß ist die Verlustleistung.

8.15. Spannungsverteilung an einer Reihenschaltung

a) ideale Kapazität

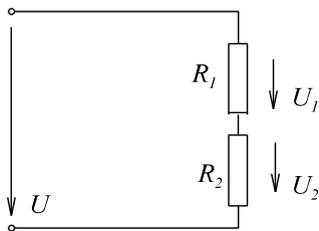


$$Q = U \cdot C_{\text{ges}} = U \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = U \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

Bild EG815A

b) Widerstände



$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Bild EG815B

c) reale Kapazität

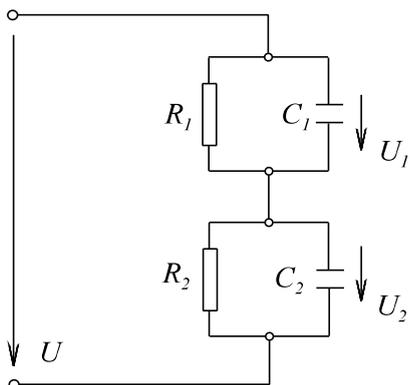
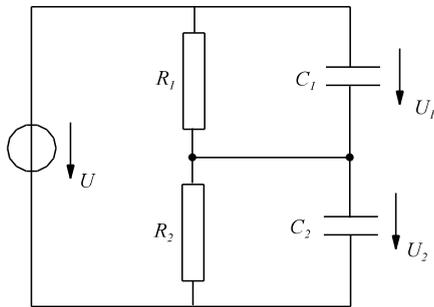
Nach dem Einschalten $\Rightarrow C_1$ bestimmen U_1, U_2 $t \rightarrow \infty$ $\Rightarrow R_1$ bestimmen U_1, U_2

Bild EG815C

Beispiel 1

Zwei verlustbehaftete Kapazitäten ($C_1 = 1 \mu\text{F}$, $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$) und ($C_2 = 2 \mu\text{F}$, $R_2 = 5 \text{ M}\Omega$) sind in Reihe geschaltet und an eine Gesamtgleichspannung von $U = 100 \text{ V}$ angeschlossen.

- a) Welche Spannungen $u_1(t=0)$ und $u_2(t=0)$ stellen sich an Anfang ein.
 b) Welche Spannungsverteilung $u_1(t \rightarrow \infty)$ und $u_2(t \rightarrow \infty)$ ergibt sich für $t \rightarrow \infty$.

**Lösungsweg:****gegeben:**

$C_1 = 1 \mu\text{F}$

$R_1 = 1 \text{ M}\Omega$

$C_2 = 2 \mu\text{F}$

$R_2 = 5 \text{ M}\Omega$

$U = 100 \text{ V}$

- a) Welche Spannungen $u_1(t=0)$ und $u_2(t=0)$ stellen sich an Anfang ein.

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_1(t=0)}{U} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$u_1(t=0) = 100\text{V} * \frac{2\mu\text{F}}{1\mu\text{F} + 2\mu\text{F}} = 66.67\text{V}$$

$$u_2(t=0) = U - u_1(t=0) = 100 \text{ V} - 66.67 \text{ V} = 33.33 \text{ V}$$

- b) Welche Spannungsverteilung $u_1(t \rightarrow \infty)$ und $u_2(t \rightarrow \infty)$ ergibt sich für $t \rightarrow \infty$.

$$t \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{u_1(t \rightarrow \infty)}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$u_1(t \rightarrow \infty) = 100\text{V} * \frac{1 \text{ M}\Omega}{1 \text{ M}\Omega + 5 \text{ M}\Omega} = 16.67\text{V}$$

$$u_2(t \rightarrow \infty) = U - u_1(t \rightarrow \infty) = 100\text{V} - 16.67\text{V} = 83.33\text{V}$$

Aufgabe 8.15.A

Zwei verlustbehaftete Kapazitäten ($C_1 = 60 \text{ nF}$, $R_1 = 2 \text{ M}\Omega$) und ($C_2 = 40 \text{ nF}$, $R_2 = 8 \text{ M}\Omega$) sind in Reihe geschaltet und an eine Gesamtgleichspannung von $U = 20 \text{ V}$ angeschlossen.

- a) Welche Spannungen $u_1(t=0)$ und $u_2(t=0)$ stellen sich an Anfang ein.
 b) Welche Spannungsverteilung $u_1(t \rightarrow \infty)$ und $u_2(t \rightarrow \infty)$ ergibt sich für $t \rightarrow \infty$.

8.16. Kraft auf Kondensatorplatten

(Elektrodynamisches Messwerk)

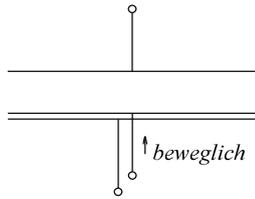


Bild EG816A

$$dW = F \cdot ds \quad F = \frac{dW}{ds}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot \frac{A}{l} \cdot U^2$$

$$\frac{dW}{ds} = -\frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot A \cdot U^2 \cdot \frac{1}{l^2}$$

$$F = -\frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot A \cdot \frac{U^2}{l^2}$$

$$F = -\frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot A \cdot E^2$$

Beispiel 1

Wie groß ist die Kraft auf die Kondensatorplatten eines homogenen Plattenkondensators in Luft. Die Daten des Kondensators:

$A = 0.5 \text{ m}^2$ Plattenfläche

$a = 1 \text{ cm}$ Plattenabstand

$U = 1000 \text{ V}$ Spannung an den Platten.

Lösungsweg:

gegeben: $A = 0.5 \text{ m}^2$ $a = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$ $U = 1000 \text{ V}$

gesucht: Kraft (F)

$$F = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot A \cdot E^2$$

$$E = \frac{U}{a} = \frac{1000 \text{ V}}{0.01 \text{ m}} = 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 0.5 \text{ m}^2 \cdot \left(10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}\right)^2$$

$$F = 2.214 \cdot 10^{-2} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{\text{V}^2}{\text{m}^2} = 2.214 \cdot 10^{-2} \frac{\text{VA s}}{\text{m}} = 2.214 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

8.17. Verallgemeinert Stromdichte

Stromdichte aufgrund von Ladungsbewegung

allgemein: $i(t) = \frac{dQ}{dt}$

$I = \frac{Q}{t}$ - Gleichstrom

$J = \frac{I}{A} = J(t) = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt}$

Leiter: stationäre Strömung von Elektronen

Dielektrikum: Verschiebung von Ladungen

a) Verschiebungsstromdichte

$$J_v = \frac{1}{A} * \frac{dQ}{dt} = \frac{d(Q/A)}{dt} = \frac{dD}{dt} = \dot{D}$$

$$\vec{J} = \dot{\vec{D}} = \epsilon * \dot{\vec{E}}$$

b) Stromdichte des elektrischen Strömungsfeldes

$$\vec{J}_s = \kappa * \vec{E}$$

c) gesamte Stromdichte

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_v$$

$$\vec{J} = \kappa * \vec{E} + \epsilon * \dot{\vec{E}}$$

d) Komplexer Ansatz:

$$\underline{E} = E * e^{j\omega t}$$

$$\underline{\dot{E}} = j\omega E * e^{j\omega t} = j\omega \underline{E}$$

$$\underline{J} = \kappa * \underline{E} + \epsilon * j\omega * \underline{E} = (\kappa + j\omega\epsilon)\underline{E}$$

$$\underline{\chi} = \kappa + j\omega\epsilon$$

Beispiel 1

In einem Material mit den Daten $\epsilon_r = 4$ und $\kappa = 10^{-6}$ A/Vm (sehr schlechter Isolator) ist ein Potenzial

$$\varphi(x, y, z) = 1000V * \left(\frac{x}{1cm} + \frac{y}{2cm} \right) * \cos(\omega t) \text{ vorhanden bei einer Frequenz von } f = 7.784 \text{ kHz.}$$

Bestimmen Sie die Stromdichte in der Form:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} * \cos(\omega t + \varphi)$$

Lösungsweg:

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1000 \frac{V}{cm} \\ 500 \frac{V}{cm} \\ 0 \frac{V}{cm} \end{pmatrix} * \cos(\omega t) = \begin{pmatrix} 10^5 \frac{V}{m} \\ 0.5 * 10^5 \frac{V}{m} \\ 0 \frac{V}{m} \end{pmatrix} * \cos(\omega t + 180^\circ) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} * 10^5 \frac{V}{m} * \cos(\omega t + 180^\circ)$$

$$\underline{\kappa} = \kappa + j\omega * \epsilon = 10^{-6} \text{ A/Vm} + j2\pi * 7784 \text{ s}^{-1} * 4 * 8.854 * 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

$$\underline{\kappa} = 10^{-6} \text{ A/Vm} [1 + j\sqrt{3}] = 2 * 10^{-6} \text{ A/Vm} / 60^\circ$$

$$\underline{\vec{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} * 10^5 \frac{V}{m} / -180^\circ$$

$$\underline{\vec{J}} = \underline{\kappa} * \underline{\vec{E}} = 2 * 10^{-6} \frac{A}{Vm} / 60^\circ * \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} * 10^5 \frac{V}{m} / -180^\circ = 0.2 \frac{A}{m^2} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} / -120^\circ$$

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} * \frac{A}{m^2} * \cos(\omega t - 120^\circ)$$

Aufgabe 8.17.A

In einem Material mit den Daten $\epsilon_r = 3$ und $\kappa = 10^{-7}$ A/Vm (sehr schlechter Isolator) ist ein Potenzial

$$\varphi(x, y, z) = 400V * \left(\frac{y}{2mm} + \frac{z}{4mm} \right) * \cos(\omega t) \text{ vorhanden bei einer Frequenz von } f = 5.992 \text{ kHz.}$$

Bestimmen Sie die Stromdichte in der Form:

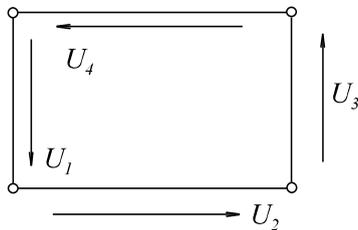
$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} * \cos(\omega t + \varphi)$$

8.18. Ohmsches und Kirchhoffsche Gesetze in Elementarform

a) ohmsches Gesetz

$$\vec{J} = \kappa * \vec{E}$$

b) zweites Kirchhoffsdes Gesetz (wenn Wirbelfrei)



$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0$$

$$\sum U = 0$$

Bild EG818A

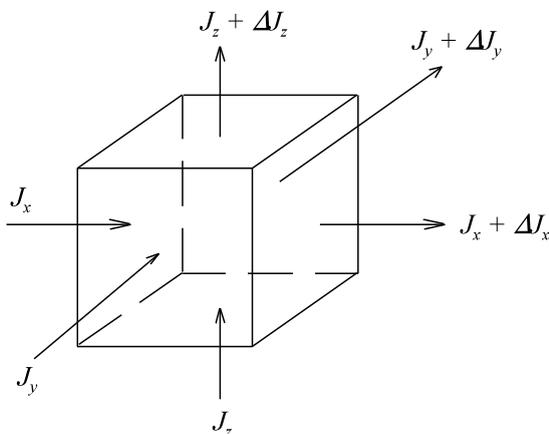
$$\oint \vec{E} * d\vec{s} = 0$$

$$rot(\vec{E}) = 0$$

$$\oint_{R.v.A} \vec{E} * d\vec{s} = \iint_{(A)} rot\vec{E} * d\vec{A} = 0$$

(über den Satz von Stokes)

c) erstes Kirchhoffsdes Gesetz



$$\sum I = 0$$

Länge Δx, Δy, Δz

Bild EG818B

$$\Delta I_x + \Delta I_y + \Delta I_z = 0$$

$$\Delta I_x = \Delta J_x * \Delta A_x = \Delta J_x * \Delta y * \Delta z$$

$$\Delta J_x * \Delta y * \Delta z + \Delta J_y * \Delta x * \Delta z + \Delta J_z * \Delta x * \Delta y = 0$$

$$\frac{\Delta J_x}{\Delta x} + \frac{\Delta J_y}{\Delta y} + \frac{\Delta J_z}{\Delta z} = 0$$

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0$$

$$div \vec{J} = 0$$

d) Veränderung der elektrischen Flußdichte

Hier wird ein Volumenelement in kartesischen Koordinaten der Längen dx , dy und dz mit der Raumladung ρ berechnet, siehe Bild EG818C.

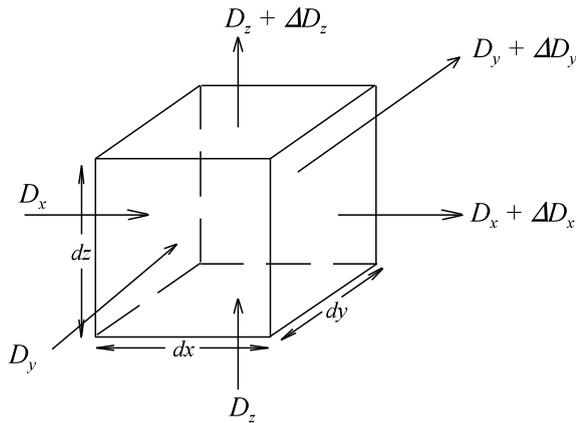


Bild EG818C

$$\psi = D \cdot A$$

$$\Delta\psi = \Delta D_x \cdot A_x + \Delta D_y \cdot A_y + \Delta D_z \cdot A_z = \rho \cdot \Delta V$$

$$\Delta\psi = \Delta D_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \Delta D_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \Delta D_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$\frac{\Delta D_x}{\Delta x} + \frac{\Delta D_y}{\Delta y} + \frac{\Delta D_z}{\Delta z} = \rho$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

$$D = \epsilon \cdot E = \epsilon [-\operatorname{grad}(\varphi)]$$

$$-\operatorname{div} \{ \epsilon [\operatorname{grad}(\varphi)] \} = \rho$$

$$\boxed{\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}}$$

e) Zusammenfassung

$$\vec{J} = \chi \cdot \vec{E} + \epsilon \cdot \dot{\vec{E}}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = 0$$

$$\int \vec{E} ds = 0$$

$$\operatorname{div}(\vec{J}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \rho$$

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}(\varphi)] = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Beispiel 1

In einem elektrischen Strömungsfeld tritt die Stromdichte $\vec{J} = \begin{pmatrix} x \cdot 10 \text{ A/m}^3 \\ 20 \text{ A/m}^2 \\ J_z \end{pmatrix}$ auf.

Bestimmen Sie das einfachste J_z ?

Lösungsweg:

$$\operatorname{div}(\vec{J}) = 0 = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

$$0 = 10 \frac{\text{A}}{\text{m}^3} + 0 + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial z} = -10 \frac{\text{A}}{\text{m}^3}$$

$$J_z = -10 \frac{\text{A}}{\text{m}^3} \cdot z$$

Beispiel 2

In einem elektrostatischen Feld mit $\epsilon_r = 5$ tritt das Potenzial

$$\varphi(x, y, z) = 5V \cdot \left(\frac{x}{1\text{cm}}\right)^2 + 20V \cdot \left(\frac{y}{1\text{cm}}\right) + 30V \quad \text{auf. Bestimmen Sie die Raumladung } \rho.$$

Lösungsweg:

$$\vec{E} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 10 \frac{\text{V}}{\text{cm}^2} \cdot x \\ 20 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \\ 0 \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \cdot x \\ 2000 \frac{\text{V}}{\text{m}} \\ 0 \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} = \epsilon^* \vec{E} = -\epsilon^* \begin{pmatrix} 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \cdot x \\ 2000 \frac{\text{V}}{\text{m}} \\ 0 \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{pmatrix} = -5 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \begin{pmatrix} 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \cdot x \\ 2000 \frac{\text{V}}{\text{m}} \\ 0 \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.427 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^3} \cdot x \\ -88.54 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \\ 0 \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \end{pmatrix}$$

$$\rho = \operatorname{div}(\vec{D}) = 0 = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -4.427 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^3} \quad D_y = 0 \quad D_z = 0$$

$$\rho = -4.427 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^3}$$

Aufgabe 8.18.A

In einem elektrischen Strömungsfeld tritt die Stromdichte $\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ 20 \text{ A/m}^2 \\ z \cdot 40 \text{ A/m}^3 \end{pmatrix}$ auf.

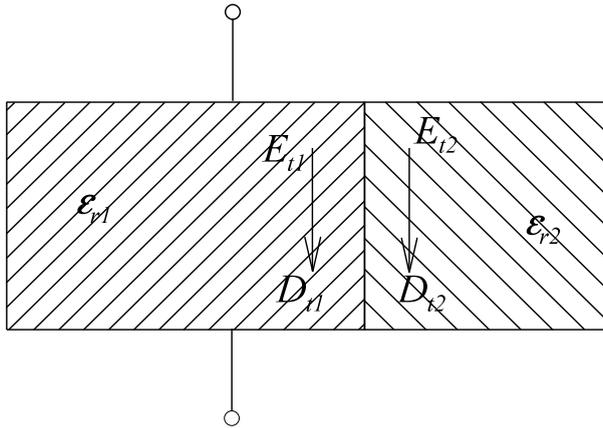
Bestimmen Sie das einfachste J_x ?

Aufgabe 8.18.B

In einem elektrostatischen Feld mit $\epsilon_r = 4$ tritt das Potenzial

$$\varphi(x, y, z) = 10V \cdot \left(\frac{z}{1\text{mm}}\right)^2 + 20V \cdot \left(\frac{y}{1\text{mm}}\right) \quad \text{auf. Bestimmen Sie die Raumladung } \rho.$$

8.19. Verhalten an Grenzflächen

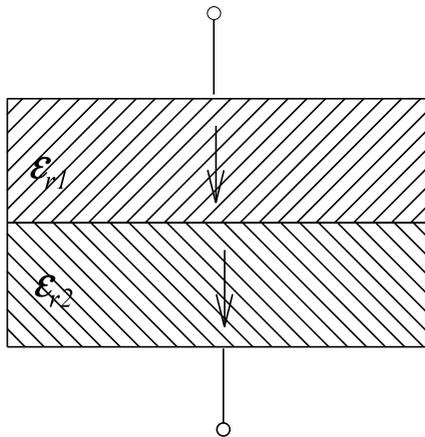


$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$\frac{D_{t1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\epsilon_2}$$

$$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

Bild EG819A



$$D_{n1} = D_{n2}$$

$$\epsilon_1 * E_{n1} = \epsilon_2 * E_{n2}$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$$

Bild EG818B

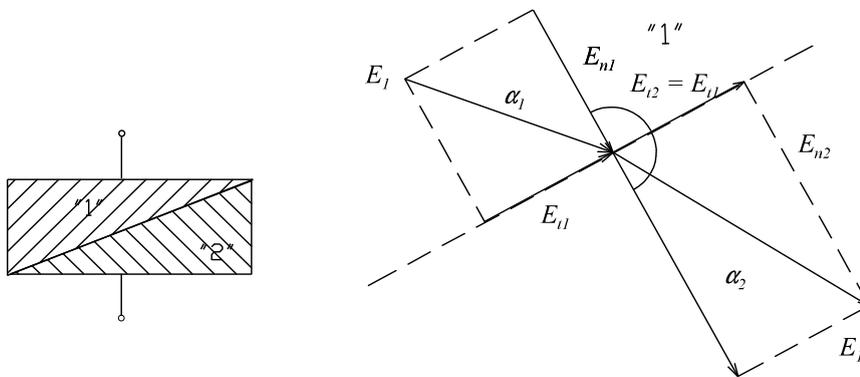


Bild EG818C

$$E_{t1} = E_{t2} \tan(\alpha_1) = \frac{E_{t1}}{E_{n1}}$$

$$E_{t1} = E_{t2} \tan(\alpha_2) = \frac{E_{t2}}{E_{n2}}$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \quad \tan(\alpha_2) = \frac{E_{t2}}{E_{n2}}$$

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\frac{E_{t1}}{E_{n1}}}{\frac{E_{t2}}{E_{n2}}} = \frac{E_{t1}}{E_{t2}} * \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = 1 * \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad \frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

Beispiel 1

An einer Trennfläche Material 1 nach Material 2 treten im Material 1 mit $\epsilon_{r1} = 2$ folgende Feldstärken auf:

$$E_{n1} = 600 \text{ V/cm} \quad - \text{ Normalkomponente}$$

$$E_{t1} = 200 \text{ V/cm} \quad - \text{ Tangentialkomponente}$$

Geben Sie die Feldstärken E_{n2} und E_{t2} im Material 2 mit $\epsilon_{r2} = 6$ an.

Lösungsweg:

$$E_{t2} = E_{t1} = 200 \text{ V/cm}$$

$$E_{n2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} * E_{n1} = \frac{2}{6} * 600 \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 200 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

Beispiel 2

An einer Trennfläche Material 1 nach Material 2 treten im Material 1 mit $\epsilon_{r1} = 2$ folgende Verschiebungsstromdichten auf:

$$D_{n1} = 6 * 10^{-6} \text{ As/mm}^2 \quad - \text{ Normalkomponente}$$

$$D_{t1} = 12 * 10^{-6} \text{ As/mm}^2 \quad - \text{ Tangentialkomponente}$$

Geben Sie die Verschiebungsstromdichten D_{n2} und D_{t2} im Material 2 mit $\epsilon_{r2} = 6$ an.

Lösungsweg:

$$D_{n2} = D_{n1} = 6 * 10^{-6} \text{ As/mm}^2$$

$$D_{t2} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} * D_{t1} = \frac{6}{2} * 12 * 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{mm}^2} = 36 * 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{mm}^2}$$

Aufgabe 8.19.A

An einer Trennfläche Material 1 nach Material 2 treten im Material 1 mit $\epsilon_{r1} = 2$ folgende Feldstärken auf:

$$E_{n1} = 80 \text{ V/cm} \quad - \text{ Normalkomponente}$$

$$E_{t1} = 12 \text{ V/cm} \quad - \text{ Tangentialkomponente}$$

Geben Sie die Feldstärken E_{n2} und E_{t2} im Material 2 mit $\epsilon_{r2} = 8$ an.

Aufgabe 8.19.B

An einer Trennfläche Material 1 nach Material 2 treten im Material 1 mit $\epsilon_{r1} = 2$ folgende Verschiebungsstromdichten auf:

$$D_{n1} = 8 * 10^{-6} \text{ As/mm}^2 \quad - \text{ Normalkomponente}$$

$$D_{t1} = 4 * 10^{-6} \text{ As/mm}^2 \quad - \text{ Tangentialkomponente}$$

Geben Sie die Verschiebungsstromdichten D_{n2} und D_{t2} im Material 2 mit $\epsilon_{r2} = 8$ an.

8.20. Abschlussaufgabe zu Kap. 8

Abschlussaufgabe 8.A

Ein Koaxialkabel der Länge $l = 10$ m, dem Radius des Innenleiters $r_1 = 0.4$ mm und dem Radius des Außenleiters $r_2 = 2$ mm soll untersucht werden. Die Daten des Dielektrikums: $\epsilon_r = 5$ $\rho = 10^{14} \Omega\text{m}$ (Leckwiderstand) $\tan(\delta) = 0.01$ bei $f = 50$ kHz

- Berechnen Sie die Kapazität C des Kabels.
- Der Gleichstromwiderstand R des Kabels ist ohne Anwendung von Formeln aus Kap. 7 zu bestimmen.

Das Kabel wird an eine Gleichspannung von $U = 20$ V angeschlossen. Das Potenzial $\varphi_1 = \varphi(r=r_1) = 0$ wird geerdet und der Pluspol wird am Innenleiter angeschlossen.

- Ermitteln Sie die gespeicherte Ladung Q .
- Geben Sie die Anzahl m der im Kabel getrennten Elektronen an.
- Wie viele Elektronen m' fließen pro Zeiteinheit als Gleichstrom über den Leckwiderstand ab ?
- Die Gleichstromverluste P_{AC} sind zu bestimmen.
- Geben Sie das Vektorfeld der Verschiebungsflussdichte D an.
- Geben Sie das Vektorfeld der Feldstärke E an.
- Wie groß ist der Maximalwert der Feldstärke E_{\max} ?
- Bestimmen Sie die spezielle Werte von Feldstärken und Verschiebungsflussdichten:
 - Feldstärke E_1 am Innenradius $r = r_1$,
 - Feldstärke E_2 am Außenradius $r = r_2$,
 - Verschiebungsflussdichte D_1 am Innenradius $r = r_1$ und
 - Verschiebungsflussdichte D_2 am Außenradius $r = r_2$.
- Geben Sie die Flächenladungsdichten an:
 - Flächenladungsdichte σ_1 am Innenleiter und
 - Flächenladungsdichte σ_2 am Außenleiter.
- Berechnen Sie das Potenzialfeld $\varphi(r)$ im Dielektrikum:
 - mit Hilfe einer Integrationskonstanten,
 - über den Weg vom Innenradius r_1 zum Radius r und
 - über den Weg vom Außenradius r_2 zum Radius r .
- Berechnen Sie die Dichte der gespeicherten im elektrostatischen Feld elektrischen Energie dW .
- Bestimmen Sie durch Volumenintegration die gesamte gespeicherte Energie.
- Wie wäre der Wert unter Aufgabenpunkt n) schneller zu berechnen.

Die Gleichspannungsquelle wird wieder abgeschaltet.

- Nach welcher Zeit t_1 wird die Spannung $u_1 = 1$ V erreicht ?

Danach wird eine Wechselspannung von $u(t) = \sqrt{2} * 20 \text{ V} * \cos(\omega t) / 50 \text{ kHz}$ angeschlossen.

- Berechnen Sie die Verluste P_{AC} .
- Geben sie den Eingangsstrom der leerlaufenden Leitung in der Form $i(t) = \hat{i} * \cos(\omega t + \varphi)$ an.

Lösungsweg:

Gegebene Geometrie- und Materialdaten:

$l = 10$ m	Länge des Koaxialkabels
$r_1 = 0.4$ mm	Radius des Innenleiters
$r_2 = 2$ mm	Radius des Außenleiters
$\epsilon_r = 5$	relative Dielektrizitätskonstante des Isolators
$\rho = 10^{14} \Omega\text{m}$	spezifischer Leckwiderstand des Isolators
$\tan(\delta) = 0.01$	Verlustfaktor des Dielektrikums bei $f = 50$ kHz

Daten der Wechselspannung für die Aufgabenpunkte q) bis r):

$U = 20$ V	Wert der Gleichspannung
$\varphi_1 = \varphi(r=r_1) = 0$	Außenleiter geerdet
$\varphi_2 = \varphi(r=r_2) = U = 20$ V	Innenleiter Pluspol der Spannungsquelle

Daten der Entladung für den Aufgabenpunkt p):

$$u_1 = 1 \text{ V}$$

Daten der Gleichspannung für die Aufgabenpunkte c) bis o):

$u(t) = \sqrt{2} * 20 \text{ V} * \cos(\omega t)$	Zeitverlauf der angelegten Spannung
$f = 50$ kHz	Frequenz der angelegten Spannung